最小位相系に対する PID 補償器で安定化可能な制御対象のパラメトリゼーション

萩原　隆明*，山田　功**，霍　輝**

*埼玉工業大学工学部機械工学科
**群馬大学大学院理工学府知能機械創製理工学教育プログラム

t-hagiwara＠sit.ac.jp

The Parameterization of All Plants Stabilized by a PID Controller for Minimum Phase System

Takaaki HAGIWARA*, Kou YAMADA** and Huo HUI**

* Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Saitama Institute of Technology
** Graduate School of Science and Technology, Gunma University

Abstract

In the present paper, we examine the parameterization of all plants that can be stabilized by a Proportional--Integral--Derivative (PID) controller for minimum phase system. Recently, if stabilizing PID controllers for the plant exist, the parameterization of all stabilizing PID controllers was considered. However, the parameterization of all plants that can be stabilized by a PID controller for minimum phase system has not been examined. Since many real plants are of minimum phase, a design method using the characteristic of the minimum phase system is desired. In this paper, we clarify this question. In addition, we present the parameterization of all stabilizing PID controllers for minimum phase systems that can be stabilized by a PID controller.

Key Words: PID control, Parameterization, Stabilizability, Minimum phase system

１．　まえがき

PID 制御は，古くから広く普及し，現在も変わらずに活用されている．P（比例）パラメータ，I（積分）パラメータ，D（微分）パラメータの役割が，直感的に理解しやすいことが，PID 制御が今もなお多くの実際の制御対象に適用されている理由であろう [1)-3)].

これまで多くの PID パラメータの調整法が提案されている [4)-14)]．しかしながら，あくまで PID パラメータの調整法を与えているにすぎず，フィードバック制御系の安定性を保証するものではない．もし，PID 制御系の安定性を保証する PID パラメータの集合が得られているならば，その集合の中で PID パラメータを探索すると，安定性が保証されているため，短時間で安定性以外の希望の制御仕様を満足する PID 制御系を設計できる可能性がある．

PID 制御系の安定性を保証する PID パラメータの集合を求める問題が，Yang, Datta et al.

により検討されている [3),21)]．参考文献 [3),21)] の方法を用いると，すでに制御系の安定性が保証されており，安定性以外の希望する制御仕様を満足する PID パラメータを選択することができ，有用である．しかしながら，参考文献 [3),21)] の方法を用いたとしても，PID 制御で安定化できない制御対象が存在する問題がある．あらかじめ PID 補償器で安定化可能な制御対象の形式が得られているならば，

1. 制御対象が PID 補償器を用いて安定化可能かどうか判断すること
2. PID 補償器で安定化可能な制御対象に対する安定化 PID 補償器を簡単に設計すること

が期待できる．この観点から，Hagiwara et al. は，PID 補償器で安定化可能な制御対象のクラスを提案している [23)]．さらに，PID 補償器で安定化可能な制御対象に対する安定化 PID 補償器を与えている．しかしながら，最小位相制御対象については未検討である．実際の制御対象の多くが最小位相系であるという観点から，最小位相系に対するパラメトリゼーション問題を検討することは安定化補償器を設計することに有効であるといえる．

本稿では，最小位相系に対する安定化 PID 補償器のパラメトリゼーションを検討する．

２．問題の記述

次式で表されるフィードバック制御系を考える．

$$\begin{cases} y = G(s)u \\ u = C(s)(r-y) \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$G(s) \in R(s)$は制御対象，$C(s) \in R(s)$は補償器，$u \in R$は制御入力，$y \in R$ は出力，$r \in R$ は目標入力である．$G(s)$ は最小位相バイプロパーな制御対象で，原点に不変零点を持たないと仮定する．

PID 制御は，式(1)の制御系において補償器$C(s)$を

$$C(s) = a_P + \frac{a_I}{s} + \frac{a_D s}{\tau_D s + 1} \tag{2}$$

と選び，P パラメータ$a_P \in R$，I パラメータと$a_I \in R$と D パラメータ$a_D \in R$ を調節することにより定常特性，過渡特性を改善することができる制御法である．$\tau_D \in R$ は小さな正の数である．式(2)で表される PID 補償器$C(s)$を用いたとき，式(1)の制御系の目標入力rから出力yまでの伝達関数は，

$$y = \frac{G(s)\left(a_P + \frac{a_I}{s} + \frac{a_D s}{\tau_D s + 1}\right)}{1 + G(s)\left(a_P + \frac{a_I}{s} + \frac{a_D s}{\tau_D s + 1}\right)} r \tag{3}$$

となる．式(3)から，P パラメータa_P，I パラメータa_Iと D パラメータa_Dを適当に選んだ場合には，式(1)の制御系の安定性は保証されない．さらに，PID 補償器では安定化できない制御対象$G(s)$が存在するという問題がある．

本稿では，PID 補償器で安定化可能な制御対象のパラメトリゼーションを提案する．

３．最小位相系に対する PID 補償器で安定化可能な制御対象のパラメトリゼーション

ここでは，PID 補償器で安定化可能な制御対象のパラメトリゼーションについて述べる．

PID 補償器で安定化可能な制御対象のパラメトリゼーションは以下の定理にまとめられる．

定理３．１

PID 補償器で安定化可能な制御対象$G(s)$のパラメトリゼーションは，

$$G(s) = \frac{\dfrac{(P_P\tau_D + P_D)s^2 + (P_P + P_I\tau_D)s + P_I}{(s+1)^2} - \dfrac{\tau_D s^2 + s}{(s+1)^2}Q(s)}{\dfrac{(P_P\tau_D + P_D)s^2 + (P_P + P_I\tau_D)s + P_I}{(s+1)^2}Q(s)} \tag{4}$$

と記述される．ただし，$P_P \in R$，$P_I \in R$，$P_D \in R$ は任意の実数であり，$Q(s) \in RH_\infty$は任意のバイプロパーな関数である．

証明．まず，必要性を証明する．すなわち，式(2)の PID 補償器が制御対象$G(s)$を安定化する

ならば，制御対象$G(s)$が式(4)で記述されることを示す．式(2)の PID 補償器が制御対象$G(s)$を安定化するという仮定から，伝達関数$C(s)G(s)/(1+C(s)G(s))$，$C(s)/(1+C(s)G(s))$，$G(s)/(1+C(s)G(s))$，$1/(1+C(s)G(s))$は安定である．簡単な計算から，伝達関数はそれぞれ

$$\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}G(s)}{\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}+\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}G(s)} \tag{5}$$

$$\frac{C(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}}{\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}+\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}G(s)} \tag{6}$$

$$\frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}G(s)}{\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}+\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}G(s)} \tag{7}$$

$$\frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}}{\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}+\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}G(s)} \tag{8}$$

である．式(5)〜(8)の伝達関数は安定であるので，$Q(s)$を

$$Q(s) = \frac{\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}}{1+\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}G(s)} \tag{9}$$

とおくと，式(9)の$Q(s)$は$Q(s) \in RH_\infty$を満足することとなる．式(9)は

$$G(s) = \frac{\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}-\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}Q(s)}{\frac{(a_P\tau_D+a_D)s^2+(a_P+a_I\tau_D)s+a_I}{(s+1)^2}Q(s)} \tag{10}$$

と書き換えられ，$P_P=a_P$，$P_I=a_I$，$P_D=a_D$とすると，式(10)は式(4)と一致することとなる．よって，必要性を証明することができた.

つぎに十分性を証明する．すなわち，制御対象$G(s)$が式(4)で記述されるならば, 式(2)の安定化 PID 補償器$C(s)$が存在することを示す.

補償器$C(s)$を

$$C(s) = P_P + \frac{P_I}{s} + \frac{P_D s}{\tau_D s+1} \tag{11}$$

とする．伝達関数$C(s)G(s)/(1+C(s)G(s))$，$C(s)/(1+C(s)G(s))$，$G(s)/(1+C(s)G(s))$，$1/(1+C(s)G(s))$は,

$$\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = 1-\frac{\tau_D s^2+s}{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I} \tag{12}$$

$$\frac{C(s)}{1+C(s)G(s)} = Q(s) \tag{13}$$

$$\frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I\}(\tau_D s^2+s)-(\tau_D s^2+s)^2Q(s)}{\{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I\}^2} \tag{14}$$

$$\frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{(\tau_D s^2+s)\,Q(s)}{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I} \tag{15}$$

と記述される． $Q(s) \in RH_\infty$であることから, 式(12) 〜(15)の伝達関数は安定である．さらに, $Q(s)$がバイプロパーであるという仮定から式(12) 〜(15)の伝達関数はプロパーである．よって，十分性を証明することができた.

以上のことから，定理３．１は証明された.

４．安定化 PID 補償器のパラメトリゼーション

PID 補償器で安定化できる制御対象$G(s)$に対する安定化 PID 補償器のパラメトリゼーションは以下の定理にまとめられる.

定理４．１

式(4)の形式で記述される制御対象$G(s)$に対する安定化PID 補償器$C(s)$のパラメトリゼーションは

$$C(s)=\frac{C_n(s)}{C_d(s)} \tag{16}$$

$$C_n(s)$$

$$=\frac{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I-(\tau_D s^2+s)Q(s)}{(s+1)^2}$$

$$-\left\{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I\right\}Q(s)\tilde{Q}(s)$$

$$C_d(s)$$

$$=\frac{\left\{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I-(\tau_D s^2+s)\,Q(s)\right\}\bar{Q}(s)}{(s+1)^2}$$

と記述される．ここで，$\tilde{Q}(s)\in RH_\infty$は任意のバイプロパーな関数であり，

$$\tilde{Q}(s)=\frac{\tilde{q}_n(s)}{\tilde{q}_d(s)} \tag{17}$$

$$\tilde{q}_n(s)$$

$$=\frac{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I}{(s+1)^2}-\frac{\tau_D s^2+s}{(s+1)^2}Q(s)$$

$$\tilde{q}_d(s)$$

$$=\frac{\left\{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I\right\}\left\{(\alpha_P\tau_D+\alpha_D)s^2+(\alpha_P+\alpha_I\tau_D)s+\alpha_I\right\}}{(\tau_D s^2+s)\,(s+1)^2}$$

$$+\frac{\left\{(P_P\tau_D+P_D-\alpha_P\tau_D-\alpha_D)\,s^2+(P_P+P_I\tau_D-\alpha_P-\alpha_I\tau_D)\,s+P_I-\alpha_I\right\}}{(s+1)^2}Q(s)$$

と記述される. $\alpha_P\in R$, $\alpha_I\in R$,　$\alpha_D\in R$は$\tilde{Q}(s)$を安定にする任意の実数である.

参考文献[20]の補題より定理４．１の証明を示す.

証明．まず，必要性を証明する．参考文献[20]の補題より，式(4)で記述される制御対象$G(s)$に対する安定化補償器のパラメトリゼーションは

$$C(s)=\frac{C_n(s)}{C_d(s)} \tag{18}$$

$$C_n(s)$$

$$=\frac{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I-(\tau_D s^2+s)Q(s)}{(s+1)^2}$$

$$-\left\{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I\right\}Q(s)\tilde{Q}(s)$$

$$C_d(s)$$

$$=\frac{\left\{(P_P\tau_D+P_D)s^2+(P_P+P_I\tau_D)s+P_I-(\tau_D s^2+s)\,Q(s)\right\}\bar{Q}(s)}{(s+1)^2}$$

と記述され，$\tilde{Q}(s)\in RH_\infty$は任意の関数である.

つぎに，式(16)の$C(s)$が安定化 PID 補償器として働く，すなわち，式(16)の$C(s)$が

$$C(s)=\alpha_P+\frac{\alpha_I}{s}+\frac{\alpha_D s}{\tau_D s+1} \tag{19}$$

と記述されるならば，$\tilde{Q}(s)$は式(17)で記述され，α_P ，α_I，　α_Dは$\tilde{Q}(s)$を安定にすることを示す. 式(16)の$C(s)$が式(19)で記述されるという仮定から，式(19)を式(16)に代入して計算すると式(17)が得られる．参考文献[20]の補題より，式(17)の$\tilde{Q}(s)$は$\tilde{Q}(s)\in RH_\infty$を満足する．それゆえ，$\alpha_P$ ，α_I，　α_Dは式(17)の$\tilde{Q}(s)$を安定にする.

反対に, α_P , α_I，α_Dが$\tilde{Q}(s)$を安定にし, $\tilde{Q}(s)$が式(17)の形式で記述できるならば，式(16)の$C(s)$は PID 補償器として働き，式(1)の制御系を安定することを示す．式(17)を式(16)に代入して計算すると

$$C(s)=\alpha_P+\frac{\alpha_I}{s}+\frac{\alpha_D s}{\tau_D s+1} \tag{20}$$

が得られる．さらに，α_P ，α_I，　α_Dが$\tilde{Q}(s)$を安定にするので，式(17)の$\tilde{Q}(s)$は$\tilde{Q}(s)\in RH_\infty$を満足する．それゆえ，式(16)の$C(s)$は式(1)の制御系を安定にする.

以上のことから，定理４．１は証明された.

５．あとがき

本稿では，最小位相系に対する PID 補償器で安定化可能な制御対象のパラメトリゼーションを明らかにした．さらに，PID 補償器で安定化可能な制御対象に対する安定化 PID 補償器のパラメトリゼーションを与えた.

参考文献

1) N. Suda, PID control, *Asakura Shoten*, (1992).

2) K. Astrom and T. Hagglund, PID controllers: Theory design, and tuning, *Instrument Society of America*, North Carolina, (1995).

3) A. Datta, M.T. Ho, and S.P. Bhattacharyya, Structure and Synthesis of PID Controllers, *Springer-Velag*, London, (2000).

4) J.G. Ziegler and N.B. Nicholes, Optimum settings for automatic controllers, *Trans. ASME*, 64, pp.759-768, (1942).

5) P. Hazebroek and B.L. van der Warden, The Optimal Adjustment of Regulators, *Trans. ASME*, 72, pp.317-332, (1950).

6) P. Hazebroek and B.L. van der Warden, Theoretical Considerations on the Optimal Adjustment of Regurators, *Trans. ASME*, 72, pp.309-315, (1950).

7) W.A. Wolf, Controller Setting for Optimum Control, *Trans. ASME*, 73, pp.413-418, (1951).

8) K.L. Chien, J.A. Hrones and J.B. Reswick, On the Automatic Control of Generalized Passive Systems, *Trans. ASME*, 74, pp.175-185, (1952).

9) G.H. Cohen and G.A. Coon, Theoretical Consideration of Retarded Control, *Trans. ASME*, 75, pp.857-834, (1953).

10) A.M. Lopez, J.A. Miller, C.L. Smith and P.W. Murrill, Tuning Controllers with Error-Integral Criteria, *Instrumentation Technology*, 14, pp.52-62, (1967).

11) J.A. Miller, A.M. Lopez, C.L. Smith and P.W. Murrill, A Comparison of Controller Tuning Techniques, *Control Engineering*, 14, pp.72-75, (1967).

12) T. Kitamori, A method of control system design based upon partial knowledge about controlled process, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, vol.15, no.4, pp.549-555, (1979).

13) T. Kitamori, Design method for PID control systems, *Journal of the Society of the Instrument and Control Engineers*, vol.19, no.4, pp.382-391, (1980).

14) P. Cominos and N. Munro, PID Controllers: Recent Tuning Methods and Design to Specification, *IEE Proceedings*, 149, pp.46-53, (2002).

15) D.C. Youla, H. Jabr and J.J. Bongiorno, Modern Wiener--Hopf design of optimal controllers. Part I, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-21-1, pp.3-13, (1976).

16) V. Kucera, Discrete Linear Control -- The polynomial equation approach, *John Wiley & Sons, Inc. New York*, (1980).

17) C.A. Desoer, R.W. Liu, J. Murray and R.T. Saeks, Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-25-3, pp.399-412, (1980).

18) J.J. Glaria and G.C. Goodwin, A parameterization for the class of all stabilizing controllers for linear minimum phase plants, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-39-2, pp.433-434, (1994).

19) M. Vidyasagar, Control System Synthesis-A factorization approach-, *MIT Press*, (1985).

20) K. Yamada and T. Moki, The parameterization of all internally stabilizing controllers for linear minimum phase systems and their characteristic, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 68-676, pp.3628-3635, (2002).

21) J. Yang, Parameter Plane Control Design for a Two-tank Chemical Reactor Systems, *Journal of the Franklin Institute*, 331B-1, pp.61-76, (1994).

22) M.T. Ho, A. Datta and S.P. Bhattacharyya, A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers, *Proceedings of the American Control Conference 1997*, pp.3922-3928, (1997).

23) T. Hagiwara, K. Yamada, A.C. Hoang and S. Aoyama, The parameterization of all plants stabilized by a PID controller, *Key Engineering Materials*, 534, pp.173-181, (2013).