

# 博士学位論文

焼入れ油を用いた円柱・円板プローブの熱伝達率の同定と  
熱流れの可視化に関する研究

Study on identification of heat transfer coefficient and visualization of thermal flow  
of cylinder and disk probe using quenching oil

令和 2 年 3 月

金森 英夫



## 論文概要

### (1) 冷却曲線と熱伝達率同定の高精度化

従来の JIS 銀円柱試験片による冷却試験は冷却剤に固有の冷却情報を正確に与え、そこから同定される熱伝達率は正確に表面情報を反映し得るが、銀表面特有の鉄鋼部材とは異なる情報が入り込む点と、熱処理工程における最大の問題である熱処理ひずみに対し上下平面の冷却情報が入らない問題がある。そこで表面状態が鋼に類似のステンレス鋼を用い、形状は円柱に加え円板試験片を用い、熱電対素線を表面直下に設置して正確な表面情報を計測した。この冷却曲線と熱伝導方程式の解析解から逆解析によって上下面で大きく異なる熱伝達率  $h_1$ ,  $h_2$  を求める手法を開発した。この  $h_1$ ,  $h_2$  を熱処理シミュレーションの境界条件に用い焼入れ予測シミュレーションをおこなった。測定結果と計算値は一致し冷却剤の性能を鋼の熱処理におけるフィールド情報で提供できる基盤が整った。

### (2) 可視化情報

表面における冷却曲線の測定と同時に試験片周囲をレーザーシートに映し出しハイスピードカメラに映像として捕える計測を行い、冷却剤の沸騰現象を観察した。また PIV 流れ解析を行い、その結果を基に金属と冷却剤界面における熱の授受に伴って起きる現象を推定した。

### (3) 蒸気膜内の微小蒸気泡と核沸騰における自己発生流の観察と推定

① 実験を進める中で、熱処理油の第一沸騰段階を捕えることができた。第一沸騰段階は投入後 0.23 s まで続き、蒸気膜が停滞するはずの下面でもこの温度領域では蒸気膜は観察されなかった。(蒸気膜段階の前段階と言われる従来の見解が確認された。)

② 続く蒸気膜段階では、下面に安定な蒸気膜が 12 s 以上にわたって生成され存続した。これは試験片後方に発生するレーザー照射の影からも存在が確認される。微小蒸気泡たち

はこの温度領域で合一することなく蒸気膜内に安定的に存在している模様で、その存在ゆえに（微小蒸気泡の分散状態が）影となって映し出されると推察された。

③ 上面の冷却曲線は、0.23 から 1.1 s (816°C) まで 0.88 s 間比較的緩冷却の蒸気膜段階を示し、816°Cで蒸気膜が崩壊し核沸騰段階に移行する特性温度が観測された。円柱側面で観察される特性温度 760°Cよりはるかに高い値が観測された（ここでは後述するように特性温度一定の原則は成り立っていない）。急速冷却の核沸騰状態では、600°Cまで激しい泡の発生が続き、550°Cでその数はおおよそ 1/2 に、500°Cでおおむね 1/100 以下に減少する変化が冷却曲線と目視観察で明らかになった。PIV 解析によると、上方への激しい連続的流れと 1/1000s の周期で水平方向に噴き出す断続する自己発生流が観測された。

④ 一方、円柱試験片側面中央部の表面温度測定において、強制対流 0~39mm/s の影響を受けずに特性温度はそれぞれ変わらない、従来からいわれる「特性温度一定の原則」が確認された。核沸騰段階においては冷却剤の蒸気泡が表面から液中に拡散し沸点以下の場所に移動すると考えられる。このとき気泡内の蒸気は液化し、その結果気泡は消滅して体積が百分の 1 以下に縮小し、そこに周囲の液体が流れ込むキャビテーションに類似の現象（温度変動キャビテーション）による自己攪拌が起きると推定される。この流れは音速レベルともまたキャビテーションでは 200000mm/s に達するともいわれ、このような速い自己発生流のため今回の強制対流 0~39mm/s レベルの流速に対しては蒸気膜が崩壊する特性温度は影響を受けず、「特性温度一定の原則が」成り立つものと推察された。

#### (4) 特性温度と冷却むら

① 上述のように冷却曲線は測定位置により大きく異り、特に蒸気膜段階の長く続く下面とそれが直ちに抜け去る上面とでは核沸騰段階では大きく異なる曲線が観測された。

② 蒸気膜の生成により冷却は大きく阻害される。蒸気膜が崩壊する特性温度は、ステンレス研磨表面の場合、円柱中央部では 730°C、円柱上下部では約 800°C、円板底部では 530°C、



気泡が抜け去る円板上部では上述したように 816°Cと観察され、「特性温度一定の原則」は成り立っていない。

③ 特性温度は材料と表面形態の影響を受けるとともに、位置・姿勢の影響で大きく変化することが明らかになった。

④ 下面の冷却曲線が 300°C以下の温度に達する 15 s 以降は対流段階になり微小蒸気泡は合一し、ひとつの大きい泡となって下部底面を（下方からの観察では）右回りに約 1 回/s で回転しながら残留する様子が観測された。

なお、蒸気膜段階における冷却曲線は上下で全く異なる曲線を描くが、16 s 以降には両曲線は一致し、ともに緩冷却の対流冷却状態となった。

⑤ 熱処理工程においては冷却むらとなる不確定要素が多くある。効率の良い焼入れを行い、かつ焼入れひずみを防止するには、姿勢を制御して冷却能力の大きい核沸騰にすみやかに移行させ対流段階に導く方法が有効と推察された。沸騰現象を利用する他の技術分野にも有用な知見と考えられる。

# 目次

## 論文概要

i

第 1 章	背景・目的.....	1
1.1	情報革命と CAE の時代.....	3
1.2	革新技術の動向.....	4
1.3	IOT とセンサー.....	5
1.4	観察と数値化.....	5
1.5	資源活用と熱処理.....	6
1.6	本研究の目的と内容.....	7
	第 1 章参考文献.....	10
第 2 章	熱処理関連基礎理論.....	13
2.1	平衡状態と経験的温度目盛り（熱力学第 0 次法則） <sup>[1]</sup> .....	15
2.2	熱力学第 1 法則 <sup>[1]</sup> .....	16
2.3	熱力学第 2 法則 <sup>[1]</sup> .....	18
2.4	諸関数および関係式 <sup>[1]</sup> .....	21
2.4.1	Helmholtz' free energy.....	21
2.4.2	Gibbs' free energy.....	21
2.4.3	Maxwell's Relations.....	22
2.4.4	熱力学的変化の進む向きと関係式.....	26
2.4.5	相平衡.....	28
2.4.5.1	断熱系.....	28
2.4.5.2	等温等積の場合.....	30

2.4.5.3	等温等圧の場合.....	3 1
2.4.6	Chemical potential と関連する関係式 .....	3 3
2.4.6.1	開いた系における相平衡と Gibbs' phase route.....	3 3
2.4.6.2	関連する関係式.....	3 5
2.5	熱処理における伝熱挙動.....	3 7
2.6	熱処理における冷却.....	3 7
2.7	冷却剤（焼入れ油）の冷却性.....	3 8
2.8	冷却曲線測定装置.....	4 0
2.8.1	冷却剤の特性を示す冷却曲線.....	4 0
2.8.1.1	沸騰と対流挙動.....	4 0
2.8.1.2	特性温度一定の原則.....	4 2
2.8.1.3	冷却特性と焼入れ性.....	4 2
2.8.1.4	冷却試験における再現性の向上について.....	4 2
2.9	熱処理シミュレーションへの期待.....	4 3
2.9.1	基本原理.....	4 3
2.9.2	CAE システム熱処理シミュレーションの開発.....	4 4
	第 2 章参考文献.....	4 5
第 3 章	円柱試験片による測定・熱解析方法 .....	4 7
3.1	熱処理用冷却剤の熱伝達率の同定.....	4 9
3.1.1	概要.....	4 9
3.1.2	はじめに.....	4 9
3.1.3	熱伝達率同定の方法.....	5 1
3.1.3.1	冷却曲線の測定.....	5 1
3.1.3.2	冷却剤.....	5 2

3.1.4	熱伝導方程式.....	5 3
3.1.4.1	熱流束ベクトル (Heat flux vector) .....	5 3
3.1.4.2	熱伝導方程式 (The differential equation of heat conduction) .....	5 4
3.1.4.3	円柱座標への変換.....	5 5
3.1.4.4	変数分離.....	5 8
3.1.4.5	熱伝達率の同定.....	6 3
3.1.4.6	熱伝達率同定の数値計算について.....	6 6
3.1.5	測定結果.....	6 6
3.1.5.1	冷却曲線.....	6 6
3.1.5.2	コールドクエンチ油の熱伝達率.....	6 8
3.1.5.3	マルクエンチの効果.....	6 8
3.1.6	同定値の検証.....	7 0
3.1.7	銀円柱試験片への鉄めっきの影響.....	7 3
3.1.8	鉄めっき銀試験片.....	7 3
3.1.9	鉄めっき銀試験片の実験結果.....	7 4
3.1.9.1	鉄めっき銀試験片の冷却曲線測定結果.....	7 4
3.1.9.2	鉄めっき銀試験片の熱伝達率曲線 $h_{Fe}(T)$ .....	7 5
3.1.10	$h_{Fe}(T)$ による熱伝達率熱処理シミュレーション .....	7 5
3.1.11	銀試験片と鉄めっき銀試験片の違いについて.....	7 9
3.1.12	鋼における表面と内部の温度差.....	7 9
3.1.13	銀試験片を用いた実験のまとめ.....	7 9
3.2	SUS303 円柱試験片による実験 .....	8 1
3.2.1	背景と目的.....	8 1

3.2.2	実験方法.....	8 2
3.2.2.1	冷却曲線.....	8 2
3.2.2.2	実験装置.....	8 2
3.2.2.3	可視化観察（高速度 4K ビデオ画像撮影） .....	8 2
3.2.2.4	熱伝達率の同定・算出と熱処理シミュレーション .....	8 4
3.2.3	結果と考察.....	8 4
3.2.3.1	冷却曲線測定結果.....	8 4
3.2.3.2	可視化実験の結果.....	8 6
3.2.3.3	熱伝達率とシミュレーション結果.....	8 8
3.2.4	結果のまとめと考察.....	8 9
3.2.5	3章結言.....	8 9
	第3章参考文献.....	9 1
第4章	SUS303, SUS304 製円板試験片による研究 .....	9 3
4.1	概要 .....	9 5
4.2	本章緒言.....	9 5
4.3	実験方法.....	9 7
4.3.1	試験片.....	9 7
4.3.2	実験装置と試験冷却液.....	9 7
4.3.3	冷却曲線の測定.....	9 8
4.3.4	高速度 4K ビデオ画像撮影.....	9 8
4.4	熱伝導方程式とその解法.....	1 0 0
4.4.1	上下面で異なる熱伝達境界を持つ一次元熱伝導方程式.....	1 0 0
4.4.2	式の無次元化.....	1 2 0
4.5	熱伝達率の同定手順.....	1 4 6

4.6	有限要素シミュレーションモデル.....	1 4 8
4.7	結果と考察.....	1 4 9
4.7.1	冷却曲線測定結果.....	1 4 9
4.7.1.1	SUS303Disc の結果.....	1 4 9
4.7.1.2	SUS304Disc の結果.....	1 5 2
4.7.2	可視化実験結果.....	1 5 3
4.7.2.1	240FPS における観察結果.....	1 5 3
4.7.2.2	960FPS における PIV 解析結果.....	1 5 6
4.7.3	熱伝達率曲線.....	1 6 3
4.7.4	シミュレーション結果.....	1 6 4
4.7.5	冷却曲線と可視化観察結果の対比.....	1 6 5
4.7.6	特性温度について.....	1 6 5
4.8	結果のまとめ.....	1 6 6
	第 4 章参考文献.....	1 6 8
第 5 章	総論.....	1 6 9
5.1	まとめ.....	1 7 0
5.2	今後の展望.....	1 7 4

謝辞

## 第1章 背景・目的

	.....	2
<u>1.1</u>	<u>情報革命と CAE の時代</u> .....	3
<u>1.2</u>	<u>革新技術の動向</u> .....	4
<u>1.3</u>	<u>IOT とセンサー</u> .....	5
<u>1.4</u>	<u>観察と数値化</u> .....	5
<u>1.5</u>	<u>資源活用と熱処理</u> .....	6
<u>1.6</u>	<u>本研究の目的と内容</u> .....	7
	<u>第 1 章参考文献</u> .....	10

## 第1章 背景・目的

産業界は自動運転、新市場創生、電動化、そしてあらゆるものがインターネットにつながる時代を迎えている。新技術を活用した新しい生活環境の中で情報化社会は今まで以上に大きく変化していくものと思われる。例えば、鉄道は 500km/h を越えるリニア超電導列車の建設が始まり、全世界に広がる空の交通網の有償キロは 2003 年に  $3 \times 10^{13}$  Km であったものがその後数年で 3 倍の  $9 \times 10^{13}$  Km になる増加傾向をたどり年間利用者数も 40 億人を越え増え続けている。プライベート（ビジネス）ジェットの利用も急増し、宇宙利用も視野にはいつてきた。同時に高度に集積化が進む半導体技術を背景に CPU のクロック周波数は 5GHz、浮動小数点演算速度 1.2Tera FLOPS ( $10^{12}$ ) の PC が登場し、スーパーコンピュータはさらに 10–150Peta ( $10^{15}$ ) FLOPS に達し、またその  $10^{10}$  倍以上のスピードを持つ量子コンピュータも生まれつつある。こうした交通量と情報量の増大と高速化が進む一方で産業構造も大きな変化を迎え、日本において 2019 年だけでもトヨタ・パナソニック、トヨタ・ソフトバンク、デンソー・ハネウェル、デンソー・ユーグレナ、といった異業種提携、また異業種参入ではソニーが自動車を作る展示をするなど業種・業態を越えた動きが拡大し、100 年に一度ともいわれる大変革期を迎えているともいわれている。こうした伝達スピード、情報量が上述のように増大した結果、一見目立たない基礎に根ざした研究や技術の中から、さまざまなネットワークを通して価値が理解され、掘り起こされ利用されるものもあらわれている。冶金学や熱処理技術はどうであろうか。自動車は多くの機能を搭載しながら信頼性と耐久性、全体はよりコンパクトで高強度、摩擦を制御し静粛性を求め動き出している。生産現場においてはこれらの製品を生産するための高い信頼性を確保しつつ、新技術を駆使し、小型、高強度、高精度などを実現する技術を革新的レベルで求められ、激しい競争が繰り広げられている。

このような動きの中で、急速に様変わりし進歩したもの、また伝統に根ざして積み上げられたもの、そこに科学のメスをいれ、一歩ずつ解明・解放を果たし進んでいるものがある。



### 1.1 情報革命と CAE の時代

コンピュータがこのようになることを 74 年前の 1946 年、大型コンピュータが米国陸軍の弾道計算に使用され、1950 年真空管論理素子の第一世代といわれるノイマン型が登場する時代に誰が想像できたであろうか。しかしその後着々と歩をすすめることとなる。ソフトウェアにおいても機械語からアセンブリ、FORTRAN 言語が生まれ、1948 年にトランジスタがベル研究所のショックレイによって発明され 1959 年第二世代と呼ばれるハードウェアに進化、1960 年に発明される集積回路の登場で劇的に小型化・高速化が進み、1964 年には第三世代、1970 年に記念すべき科学計算と COBOL による事務処理にも利用できる IBM360、日本では国鉄のみどりの窓口で座席指定業務が開始され、銀行のオンラインシステムも登場した。1980 年にパーソナルコンピュータ NEC-PC8001 が発売となり、1990 年に入ると家電機器や産業機械に MPU が組み込まれるようになる。その後 LAN 環境が整備され政府機関、自治体、学校などでも利用が進み第 5 世代を経て、2000 年になり低コストで高性能な PC やインターネットが一般家庭にも普及する高速大容量のネット時代に突入する。チャットや SNS で双方向通信が可能になり、ラップトップ、モバイル、スマートフォン、タブレットなど様々な端末が生まれ、同時に無線通信は無線 LAN、Wi-Fi、通信速度 1Giga/s の 4G（通信遅延 50ms、同時デバイス接続数 1000/局）から 20Giga/s の 5G（通信遅延 1ms、同時デバイス接続数 20000/局）へと目まぐるしい進化をとげるまでになった。

この間、生産現場では、FA (Factory Automation) 化が進み、研究開発支援 CAE【Computer Aided Engineering】概念が提示され、生産計画原材料・資材調達管理 MRP【Material Requirement Planning】、製品設計（設計モデル化支援）CAD【Computer Aided Design】、工程设计（生産工程計画）CAPP【Computer Aided Process Planning】、日程計画（生産日程計画）CAP【Computer Aided Planning】、生産・製造支援 CAM【Computer Aided Manufacturing】、FMS【Flexible Manufacturing System】などが普及し、開発と生産の効率化に大きく寄与していく<sup>[1]</sup>。

## 第1章 背景・目的

性能向上を目指しながら同時に時短、価格低減を実現するコスト最適化達成手段としてなお大きく進化の余地を残す分野と考えられる。高い専門性を持ちながら貴重な Trial and Error を経験するエキスパートの数は限られる上、冒頭に述べた革新性を求める時代の要求に応えるには、今までエキスパートも経験したことのない新しいことへの対応を迫られる。ここに起こり得ることを予測できる確度の高いシミュレーションがあればどうなるであろうか。試作工程が大幅に短縮され、また経験からは到達できない発想も生まれ、それが開発目標を短時間で達成する結果、貴重な 100 年に一度訪れるチャンスを手中に収める可能性を秘めているといえる。

### 1.2 革新技術の動向

自動車産業において、ハイブリッド化は電動化に大きく舵をきるきっかけとなった。それまでのスペースにモーターや大型化したバッテリーを積みながらエンジン系も搭載というまさにハイブリッド対応で双方小型、高強度を否応なく求められている<sup>[2]</sup>。そして今後、ハイブリッドが進化を続けるのか、あるいは電気自動車に突き進むのか、実用化の進んだ FC (Fuel cell) に向かうか、そして一方ガソリンを使用しながらジーゼルの発火メカニズムを採用する予混合圧縮着火、またはスーパーリンバーン超希薄燃焼、気筒停止、ガソリンを水素に改質し燃焼させるなど内燃機関も著しい大きな変革の波の中で進化を遂げている。こうなると何が主流になるか見通すことは困難である。そして、このようなパワーソースの動向により、パワーユニットはもとより、例えば燃料タンクはこのままか、水素充填となるか、タンクは不要となるか、またパワーを伝える加減速装置は、バッテリーなどは、さらにそれにつながる部品の動向はとなると、それぞれが 0 となることを含め劇的变化を生ずる世界が広がっていく。その意味で先は不透明であるが無限に広がる夢もある。

### 1.3 IOT とセンサー

そうした中で、自動運転についてはパワーユニット、駆動系のメカニズム・形式がどうあれ普及が進むと考えられる。そこでは運転の自動化に伴い各部品やユニットの状態を監視するモニタリングの要求も高まるはずである。すなわち、目の前の障害物や危険を回避して安全に移動できるシステムが完成したとして、これを実現させている個々の部品の信頼性は完全に保証されるものでなくてはならない。各部が信頼性を担保できる状態であることを確認し運転を続ける必要がある。すべての部位が正常に作動していることがそのとき、(自動で危険を回避する)運転の瞬間に担保されなければならない。系内の必要な情報が整理され、その一部はインターネットにつながり、IP アドレスを持つコンピュータチップからの情報の受発信を経て実現される。必要な情報とは機械部品にとどまらず、走行を維持するために必要な潤滑油、タイヤなど有機材料部品までにも及ぶと考えられる。コンピュータチップに情報を送る観察システムと情報をキャッチするセンサーは必須アイテムになることは間違いなさそうである。

こうした自動車に対する信頼性は、各部品が担い、それを生産する工場の生産設備にまで及び、生産機械から生産物のすべての信頼が担保されなければならないことになる。

### 1.4 観察と数値化

機械部品の動作を保証するためには、ある時間のある時間間隔に対する位置、応力・圧力、温度などを検知する必要がある。さらに金属部品に接する潤滑剤やブレーキ液、ラジエター内の不凍液などの有機物や有機物水溶液についての性能や状態<sup>[3-13]</sup>を判定することも重要である。

有機物は酸素と結合する酸化反応や特に金属表面を介して電子や水素原子の授受を通してそれが加速される酸化および腐食反応<sup>[3-6]</sup>、摩擦摩耗<sup>[7-9]</sup>、また空気中のバクテリアに侵される腐敗の進行<sup>[10-13]</sup>などが考えられる。無事故で安定した操業や運転を実現するためには、

有機物の耐酸化<sup>[4]</sup>、耐腐食性<sup>[3-6]</sup>、耐腐敗性<sup>[10-13]</sup>また、金属に対する潤滑性や耐摩耗性<sup>[7-9]</sup>なども保証されなければならない。信頼性を確保できる原理にかなった方法で機械部品や有機物の状態を表示できるようにする必要がある。

### 1.5 資源活用と熱処理

地上に最も多くある金属である鉄を活用し、僅かな成分を添加した炭素鋼をオーステナイト ( $\gamma$  鉄) 組織になるまで加熱し、その後急冷してマルテンサイト変態させ硬化させる鋼の焼入れは、部品の高強度化、耐摩耗性向上を図るうえで、資源の有効利用の観点、低価格ということから極めて有望な方策といえる。また靱性を持たせるための焼き戻しや、表層を硬化させる浸炭焼入れは、高価な高炭素鋼を使用することなく中心部は靱性を保てるなど歯車の革命ともいえる熱処理技術といえる<sup>[14]</sup>。

このような熱処理条件や、それに適する熱処理用冷却剤を選定するには、多くの専門知識と経験が必要であるが、コンピュータを用いたシミュレーションによって比較的簡単に適切な攪拌速度や油種の選定が可能となる。また設計者や専門家には、より精度の高い設定が可能な手段として、熱処理シミュレーションへの期待は大きいと考えられる。

一般に鋼を焼入れによって硬化させる際の焼入性の支配因子としては、①冷却剤の冷却能、②鋼材の大きさや形状、③鋼の相変態特性の3種が重要であるといわれている。そして現在、鋼材の組織変化、温度分布、応力ひずみ状態の連成関係を考慮した<sup>[15,16]</sup>CAE 熱処理シミュレーションシステム HERATS<sup>[17]</sup>と SYSWELD<sup>[18]</sup>が発表され、その後 GRANTS<sup>[19]</sup>、DEFORM-HT<sup>[20]</sup>、DANTE<sup>[21]</sup>、および COSMAP<sup>[22]</sup>が開発され、実用段階に入っている。このようなシミュレーションシステムにおいては、上述①～③のデータをプリプロセッサを通じて入力する。特に①の冷却剤の冷却能については、金属表面における金属内部から冷却剤への熱伝達特性データを入力する必要がある。

## 第1章 背景・目的

JISK2242 熱処理油（冷却性能試験方法）<sup>[23]</sup>で規定される銀試験片を用い、加熱された銀試験片が冷却剤によって冷却されるとき試験片表面の温度を測定すると、多くの場合その冷却剤に固有の膜沸騰、核沸騰、および対流熱伝達によって冷却される過程を示す冷却曲線を得ることができる。このような冷却曲線の示す温度変化は、冷却剤の冷却能をとらえるものとして実用上広く利用されている。しかし、温度変化は、試験片の形状や物性に依存する。したがって様々な異なる材料や形状を設定して行うシミュレーション計算への入力データとして、そのまま適用することができない。

### 1.6 本研究の目的と内容

未経験や新規の課題に対するフィールド予測を可能にする CAE や熱処理シミュレーションへの期待は大きく、本報告では次の目的のもとに研究を進める。

#### (1) 熱処理工程における熱伝達率同定とその高精度化

従来の JIS 銀円柱試験片は冷却剤に固有の冷却情報を正確に与え、そこから同定される熱伝達率は正確に表面情報を反映し得るが、銀表面特有の鉄鋼部材とは異なる情報が入り込む点と、熱処理工程における最大の問題である熱処理ひずみに対し上下平面の冷却情報が入らない問題がある。そこで表面性状が鋼に類似のステンレス鋼を用い、形状は円柱に加え円板試験片を用いる。300°Cにおける銀の熱伝導率は Table 1.1 に示すように  $407 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  に対しステンレス鋼のそれは  $19 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  と鋼は銀の 4.7%の小さな値であるため、表面

Table 1.1. Thermal conductivity of metal and alloy,  $k/\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Temperature, °C	0	100	300
Silver	428	422	407
Carbon steel (0.8%C)	50	48.5	41.5
Austenite stain less steel	15	16.5	19

## 第1章 背景・目的

温度計測においては熱が伝わりにくいために、表面の温度をとらえにくい問題がある。しかし最表面の一点で測定できれば、銀に比べ20倍以上熱が長時間保持されるため正確な温度変化を読み取れるメリットもある。

そこで具体的目標は次のようになる。

- ① 試験片にはステンレス鋼を用い、形状は円柱に加え円板試験片を用いる。
- ② 熱電対素線を表面直下に設置して正確な表面温度情報を計測する。
- ③ 得られるこの冷却曲線と熱伝導方程式の解析解から逆解析によって円柱では側面の温度依存熱伝達率  $h(T)$ ，円板において上下面で異なる温度依存熱伝達率  $h_1(T)$ ， $h_2(T)$  を求める手法を開発する。
- ④ この  $h(T)$ ， $h_1(T)$ ， $h_2(T)$  を熱処理シミュレーションの境界条件に用い、熱伝導、変態、応力・ひずみの連成関係を解きながら進行する焼入れ予測シミュレーションをおこない、冷却剤の性能を生産現場におけるフィールド情報で提供できる基盤を整える。

### (2) 冷却曲線と可視化情報の活用

冷却曲線の測定と同時に冷却過程における試験片とその周囲の断面をレーザーシート上に映し出しハイスピードカメラによってとらえる同時計測を行い、冷却剤の特性に加え、蒸気膜やそれを取りまく液体の挙動、核沸騰における蒸気泡の挙動とその周囲にある液体の挙動を観察する。合わせて可視化映像から PIV 流れ解析を行う。

具体的には次のような目標となる。

- ① 冷却曲線に対応するレーザーシートに投影される 4K 高速度カメラ映像を記録する。
- ② 冷却曲線と同期させた冷却挙動の可視化観察を行う。
- ③ 可視化映像から PIV 流れ解析を行う。

### (3) 蒸気膜内の微小気泡の存在と核沸騰における温度変動現象の観察

## 第1章 背景・目的

蒸気膜は冷却を阻害すると考えられる。またその存在が不安定であると冷却状態を不安定化し冷却むらの原因となり、予測しにくい熱処理ひずみを発生させる。一方、核沸騰における蒸気泡は高速で移動するため自己攪拌効果があり、冷却能を向上させる。さらにこれが液化すると（1mol の気体は 1mol の液体にかわり）、水蒸気であれば 100°Cにおいて  $0.000598\text{g/cm}^3$  の密度から、99°Cの水の密度は  $0.95906\text{g/cm}^3$  であり、体積は  $(0.598 \times 10^{-3}) / 0.95906 = 1/1603.78$  に減少する。同時に気化潜熱  $582.8\text{cal/g}$  が奪われる。もともとの高速移動に加え、体積が  $1/1603.78$  に減少することによる空孔に音速近くで流れ込む新たな自己攪拌エネルギーと液化により常態比熱の 582.8 倍の液化潜熱エネルギーが提供される。冷却剤の気化成分が安定化する蒸気膜段階ではこのような潜熱発生・吸収や大きな変動による攪拌効果は期待できない。しかしながら、蒸気膜が崩壊し小さな蒸気泡が無数に発生する核沸騰段階では無数の蒸気泡が沸点以下の温度領域へ移動すると、それは起こり、両者の冷却能と攪拌効果に大きな差が生ずることになる。このような現象を観察し熱処理における液体プール冷却の実体を明らかにする。

- ① 蒸気膜内の微小蒸気泡を観察し分散状態と凝集・合体状況を観察する。
- ② 蒸気膜が崩壊し核沸騰段階に移行する状況を明らかにする。
  - ・特性温度の測定
  - ・微小蒸気泡の観察
- ③ PIV 解析により自己攪拌効果を生ずる自己発生流を観察し現象を捉える。

## 第1章 背景・目的

### 第1章参考文献

- [1] 近藤薫：情報と職業，丸善出版株式会社，pp. 88-90 (2015).
- [2] 杉本剛：“実操業の品質向上に適用する浸炭熱処理における組織と変形の高精度制御”，  
埼玉工業大学学位論文 (2019).
- [3] 金森英夫，飯野光明，辻川茂男，防食技術, 37, pp. 601-607 (1988)
- [4] 金森英夫，中村英一：“水溶性高分子溶液の分解抑制”，腐食防食’95 講演集 A-309,  
pp.115-118 (1995)
- [5] 金森英夫，長瀬直樹，渡辺さやか：“軟鋼に対する水・グリコール作動液の防食性に及  
ぼす脂肪酸石けんの効果”，第 57 回材料と環境討論会講演集, pp. 358-361(2010)
- [6] 金森英夫，辻川茂男：“環境因子の調整で不動態化させた軟鋼のすきま腐食発生の下  
限界電位とその制御”，第 61 回材料と環境討論会講演集, pp.477-480 (2014)
- [7] 金森英夫，岩田光弘：“耐摩耗性水グリコール作動液の開発”，出光トライボレビュー，  
T-17-5, p.1044(1990)
- [8] 金森英夫，畑一志：“水系潤滑油中における炭素鋼不働態の摩耗抑制作用”，第 38 回  
腐食防食討論会講演集，C-307, pp.279-282 (1991)
- [9] 金森英夫：“水可溶化油の性能について”，出光技報，34，No.2, pp.720-726 (1991)
- [10] 金森英夫，辻川茂男：“微生物による油剤機能劣化を防止し防錆機能を維持する水  
溶性切削剤”，材料と環境 2014 講演集，pp.201-204 (2014)
- [11] 金森英夫，特公昭 62-292896
- [12] 金森英夫，特公昭 62-292899
- [13] 金森英夫，特公昭 63-117096
- [14] 日本鉄鋼協会編，“鋼の熱処理”，丸善出版株式会社，pp.3-187(1992)



## 第1章 背景・目的

- [15] T. Inoue, Z.G. Wang, “Coupling between Stress, Temperature, and Metallic Structures during Processes Involving Phase Transformations”, *Material Sci. Technology*, Vol.1, pp.845-850(1985)
- [16] 巨東英, 佐橋真人, 大森隆弘, 井上達雄, “変態・熱・力学による焼き戻し過程シミュレーション”, *材料*, Vol.45, No.6, pp.205-212(1992)
- [17] T. Inoue, D.Y. Ju and K. Arimoto, “Metallo-thermo-mechanical Simulation of Quenching Process --- Theory and Implementation of Computer Code HEARTS”, *Proc. 1<sup>st</sup> Int. Conf. on Quenching and the Control of Distortion*, ASM International, pp.205-212(1992)
- [18] D. Pont: *Proc. of 3<sup>rd</sup> World Congress on Computational Mechanics*, Chiba, p.1732(1994)
- [19] 七野勇人 : *KOMATSU TECHNOLOGICAL REPORT*, 44, p.52(1998)
- [20] K. Arimoto, G. Li, Arvind, and W.T. Wu: *Proc. of the 18<sup>th</sup> ASM Heat Treating Process Conference & Exposition*, p.121(1998)
- [21] C. Mgbokwere and M. Callabresi: *J. Eng. Mater. Technol., Trans. ASME*, 122, p.135(2000)
- [22] D. Y. Ju, Y. Ito and T. Inoue, “Simulation and Verification of Residual Stress and Distortion in Carburizing-quenching Process of a gear Shaft”, *Proc. of 4<sup>th</sup> International Conf. on Quenching and Control of Distortion*, Nov. 23-25, pp.291-296(2003)
- [23] JIS K 2242-1991: “熱処理油（冷却性能試験方法）” (1991)

## 第1章 背景・目的

## 第2章 熱処理関連基礎理論

<a href="#">2.1</a>	<a href="#">平衡状態と経験的温度目盛り（熱力学第0次法則）<sup>[1]</sup></a>	15
<a href="#">2.2</a>	<a href="#">熱力学第1法則<sup>[1]</sup></a>	16
<a href="#">2.3</a>	<a href="#">熱力学第2法則<sup>[1]</sup></a>	18
<a href="#">2.4</a>	<a href="#">諸関数および関係式<sup>[1]</sup></a>	21
<a href="#">2.4.1</a>	<a href="#">Helmholtz' free energy</a>	21
<a href="#">2.4.2</a>	<a href="#">Gibbs' free energy</a>	21
<a href="#">2.4.3</a>	<a href="#">Maxwell's Relations</a>	22
<a href="#">2.4.4</a>	<a href="#">熱力学的変化の進む向きと関係式</a>	26
<a href="#">2.4.5</a>	<a href="#">相平衡</a>	28
<a href="#">2.4.5.1</a>	<a href="#">断熱系</a>	28
<a href="#">2.4.5.2</a>	<a href="#">等温等積の場合</a>	30
<a href="#">2.4.5.3</a>	<a href="#">等温等圧の場合</a>	31
<a href="#">2.4.6</a>	<a href="#">Chemical potential と関連する関係式</a>	33
<a href="#">2.4.6.1</a>	<a href="#">開いた系における相平衡と Gibbs' phase route</a>	33
<a href="#">2.4.6.2</a>	<a href="#">関連する関係式</a>	35
<a href="#">2.5</a>	<a href="#">熱処理における伝熱挙動</a>	37
<a href="#">2.6</a>	<a href="#">熱処理における冷却</a>	37
<a href="#">2.7</a>	<a href="#">冷却剤（焼入れ油）の冷却性</a>	38
<a href="#">2.8</a>	<a href="#">冷却曲線測定装置</a>	40
<a href="#">2.8.1</a>	<a href="#">冷却剤の特性を示す冷却曲線</a>	40
<a href="#">2.8.1.1</a>	<a href="#">沸騰と対流挙動</a>	40
<a href="#">2.8.1.2</a>	<a href="#">特性温度一定の原則</a>	42

## 第2章 熱処理関連基礎理論

<a href="#">2.8.1.3</a>	<a href="#">冷却特性と焼入れ性</a>	42
<a href="#">2.8.1.4</a>	<a href="#">冷却試験における再現性の向上について</a>	42
<a href="#">2.9</a>	<a href="#">熱処理シミュレーションへの期待</a>	43
<a href="#">2.9.1</a>	<a href="#">基本原理</a>	43
<a href="#">2.9.2</a>	<a href="#">CAEシステム熱処理シミュレーションの開発</a>	44
	<a href="#">第2章参考文献</a>	45

## 第2章 熱処理関連基礎理論

### 2.1 平衡状態と経験的温度目盛り（熱力学第0次法則）<sup>[1]</sup>

物体 A と B が熱平衡にあり、A と C が熱平衡にあれば、B と C も熱平衡にある。これを熱力学第0次法則といい、C と B を接触させなくても A を介して平衡状態に達している温度を測定できる。この場合 A は温度計ということになる。

圧力  $P$  を一定とし体積  $V$  と温度  $\theta$  の式で表現すると、

$$\theta = 100 \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \quad (2-1)$$

ここで  $V_0$  は  $0^\circ\text{C}$  における A の体積、 $V_{100}$  は  $100^\circ\text{C}$  における A の体積である。

圧力  $P$  を含めれば

$$\theta = f(P, V) \quad (2-2)$$

となる。

式 (2-2) を  $P = f(\theta, V)$  に書き換え、さらに

$$P = P(\theta, V)$$

$$dP = \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_V d\theta + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_\theta dV$$

通常の設定環境とすると

$$0 = \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_V d\theta + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_\theta dV$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_V + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_\theta \frac{dV}{d\theta} = \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_V + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_\theta \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P = 0$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_\theta \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P = - \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_V$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_\theta \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P \left( \frac{\partial \theta}{\partial P} \right)_V = -1 \quad (2-3)$$

また、次がすべて正になるように定義される。

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P : \text{体積膨張率 (Volume expansivity)} \quad (2-4)$$

$$B = V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T : \text{等温体積弾性率 (Isothermal bulk modulus)} \quad (2-5)$$

$$\gamma = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T : \text{等温圧縮率 (Isothermal compressibility)} \quad (2-6)$$

## 2.2 熱力学第1法則<sup>[1]</sup>

いま、熱量を  $Q$ ，仕事を  $W$ ，蓄積される内部エネルギーを  $U$  とし、それぞれの微小変化を  $dQ, dW, dU$  とすると熱力学第1法則は

$$dU = d'W + d'Q \quad (2-7)$$

というエネルギー保存則で表される。

ここで  $d'W, d'Q$  は道筋（エネルギーの移動方法，経路）に依存するため完全微分にならないが、両者の和である  $dU$  は道筋によらない完全微分で表されるものになっている。

いま静水圧では

$$d'W = -PdV \quad (2-8)$$

と書けて式 (2-7) は

$$dQ' = dU + PdV \quad (2-9)$$

なお、式 (2-9) に理想気体  $PV = nR\theta$  を適用すると式 (2-8) は、

$$dW' = -nR\theta \frac{dV}{V} \quad (2-10)$$

いま、 $dU = 0$ （内部エネルギーの変化が0の設定）であれば

式 (2-7) は、 $dQ = -dW$

$$dQ = nR\theta \frac{dV}{V} \quad (2-11)$$

$$Q = nR\theta \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = nR\theta \ln \frac{V_2}{V_1} = nR\theta \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (2-12)$$

$U = U(\theta, p)$ ,  $V = V(\theta, p)$  についての全微分は,

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p d\theta + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_\theta dP$$

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p d\theta + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_\theta dP$$

$$d'Q = dU + PdV = \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p + P \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p \right\} d\theta + \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_\theta + P \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_\theta \right\} dP$$

そこでエンタルピー (Enthalpy)

$$H \equiv U + PV \tag{2-13}$$

という量を導入し, 式 (2-10) 定圧 (Isobaric), 等温 (Isochoric) における偏微分

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_p = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p + P \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_\theta = \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_\theta + P \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_\theta + V$$

を第一法則の式 (2-7) に代入すると

$$d'Q = \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_p d\theta + \left\{ \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_\theta - V \right\} dP \tag{2-14}$$

すると定圧比熱 (Isobaric specific heat)  $c_p$  は

$$c_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_p = \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_p \tag{2-15}$$

なお, 定積比熱 (Isochoric specific heat)  $c_v$  は式 (2-7) から

$$c_v = \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_v = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_v \tag{2-16}$$

### 2.3 熱力学第2法則<sup>[1]</sup>

物質の膨張などで表現された（熱力学第0次法則による）式（2-1）の温度目盛りによって二つの状態における熱エネルギー  $Q_1$ ,  $Q_2$  の比を表すと

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\phi(\theta_2)}{\phi(\theta_1)} \quad (2-17)$$

ここで物質に依らない熱力学的温度目盛り  $T$  を導入し、

熱エネルギー  $Q_1$ ,  $Q_2$  の比に着目すると

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (2-18)$$

と表せる。

水の沸点における熱エネルギーを  $Q_s$ , 氷点におけるそれを  $Q_0$  とし、氷点の熱力学的温度を  $T_0$  とすると

$$\frac{Q_s}{Q_0} = \frac{T_0 + 100}{T_0} \quad (2-19)$$

左辺の  $Q_s, Q_0$  はそれぞれ計測可能であり、 $T_0$  を求めることができる。

$$T_0 = 273.15 \quad (2-20)$$

また、式（2-15）を書き直すと

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$$

いま、高温の熱原から体系に  $Q_2$  という熱が移動し、体系では何か仕事をして  $Q_1$  という熱を熱源に返すことを考えると式（2-15）は次のように書ける。

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

ここで熱源→体系への熱の向きを正と表せば次のように書ける。



$$\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_{i+1}}{T_{i+1}} + \frac{Q_{i+2}}{T_{i+2}} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} = 0 \quad (2-21)$$

第一法則が成り立つ準静過程で式 (2-21) は

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad \text{ならばそのサイクルは可逆 (Reversible=Rev.)}$$

実際には 
$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} < 0 \quad \text{不可逆 (Irreversible=Irrev.)}$$

となる。いま、無限に多くの熱源があり、交換する熱量を  $d'Q$  (体系に入るほうを正) と

すれば  $\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = \oint \frac{d'Q}{T}$  と書いて

$$\oint \frac{d'Q}{T} < 0: \text{Irrev.} \quad (2-22)$$

これを Clausius の不等式と言ひ、過程が可逆 (Rev.) になる極限で

$$\oint \frac{d'Q}{T} = 0: \text{Rev.} \quad (2-23)$$

と表せる。

体系が  $p_1$  という状態から出発し、経路  $K$  を通つて  $p_2$  という状態に到達しそこから  $K'$  と

いう経路で  $p_1$  という状態に戻り、この変化が準静的過程のサイクルであるならば、

$$\int_{p_1 K p_2} \frac{d'Q}{T} + \int_{p_2 K' p_1} \frac{d'Q}{T} = 0: \text{Rev.} \quad (2-24)$$

$p_1$  から  $p_2$  という状態にいくのに  $K''$  なる経路を通れば

$$\int_{p_1 K'' p_2} \frac{d'Q}{T} + \int_{p_2 K' p_1} \frac{d'Q}{T} = 0: \text{Rev.} \quad (2-25)$$

式 (2-24)、(2-25) の左辺第二項は等しいから

$$\int_{p_1 K p_2} \frac{d'Q}{T} = \int_{p_2 K' p_1} \frac{d'Q}{T} \quad (2-26)$$

即ち  $\int_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{d'Q}{T}$  は道筋によらない状態量である。

今、体系の標準状態を  $p_0$  とするとこれから任意の状態  $p$  に達するのに可逆である限り

$\int_{P_0 \rightarrow P} \frac{d'Q}{T}$  の値は道筋によらず状態  $p$  だけによってきまる。これを

$$S \equiv \int_{P_0 \rightarrow P} \frac{d'Q}{T} : \text{Rev.} \quad (2-27)$$

と書くと  $S$  は体系の平衡状態によって決まる状態量であり Entropy と名付けられた。

$p_1$  の Entropy を  $S_1$ ,  $p_2$  の Entropy を  $S_2$  とすると,

$$S_1 = \int_{P_0}^{P_1} \frac{d'Q}{T} : \text{Rev.}, \quad S_2 = \int_{P_0}^{P_2} \frac{d'Q}{T} : \text{Rev.} \quad (2-28)$$

熱力学的温度目盛りにより物質に依存しない温度と熱エネルギーの関係を表す熱力学第二法則は次のように表現される。

準静的可逆 (Reversible) 過程では

$$S_2 - S_1 = \int_{P_1}^{P_2} \frac{d'Q}{T} : \text{Rev.} \quad (2-29)$$

$p_1$  と  $p_2$  が接近していれば

$$dS = \frac{d'Q}{T} : \text{Rev.} \quad d'Q = TdS : \text{Rev.} \quad (2-30)$$

不可逆 (Irrev.) 過程においては (2-22) より

$$\int_{P_1 \rightarrow P_2} \frac{d'Q}{T} \Big|_{\text{Irrev.}} + \int_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{d'Q}{T} \Big|_{\text{Rev.}} < 0 : \text{Irrev.} \quad (2-31)$$

ここで  $\int_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{d'Q}{T} \Big|_{\text{Rev.}} = S_1 - S_2$  であるから

$$\int_{P_1 \rightarrow P_2} \frac{d'Q}{T} \Big|_{\text{Irrev.}} + S_1 - S_2 < 0 : \text{Irrev.}, \text{ or } \int_{P_1 \rightarrow P_2} \frac{d'Q}{T} \Big|_{\text{Irrev.}} < S_2 - S_1 : \text{Irrev.} \quad (2-32)$$

小さな不可逆 (Irrev.) 変化では

$$\frac{d'Q}{T} < dS : \text{Irrev.} \quad (2-33)$$

## 2.4 諸関数および関係式<sup>[1]</sup>

### 2.4.1 Helmholtz' free energy

$$A \equiv U - TS \quad A : \text{Helmholtz' free energy} \quad (2-34)$$

第一法則, 式 (2-4) と第二法則, 式 (2-30) より

$$dA = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

$$dA = -PdV - SdT \quad (2-35)$$

$$\text{In, } A = A(V, T)$$

$$dA = \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right) dV + \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right) dT$$

$$\therefore P = -\left( \frac{\partial A}{\partial V} \right), \quad S = -\left( \frac{\partial A}{\partial T} \right) \quad (2-36)$$

式 (2-34) は式 (2-36) より,

$$U = A - T \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right) = -T^2 \left[ \frac{\partial (A/T)}{\partial T} \right]_V \quad (2-37)$$

$$\therefore \frac{\partial (A/T)}{\partial T} = \left\{ -\frac{A}{T^2} + T \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right) \right\}$$

### 2.4.2 Gibbs' free energy

$$G = A + PV : \text{Gibbs' free energy} \quad (2-38)$$

式 (2-34) と (2-13) の Enthalpy を用いると

$$G = H - TS \quad (2-39)$$

$$\therefore H = U + PV, A = U - TS$$

$$G = A + PV = U - TS + PV = H - TS$$

式 (2-35) を用いた微分系は,

$$dG = dA + PdV + VdP = -PdV - SdT + PdV + VdP = VdP - SdT$$

$$dG = VdP - SdT \quad (2-40)$$

$$\begin{aligned}
 \text{In, } G &= G(P, T) \\
 dG &= \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right) dP + \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right) dT \\
 \therefore V &= \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right), \quad S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)
 \end{aligned} \tag{2-41}$$

式 (2-39) は, 式 (2-41) から

$$H = G + TS = G - T \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right) = -T^2 \left[ \frac{\partial (G/T)}{\partial T} \right]_P \tag{2-42}$$

いま, 成分 1, 2, 3... が  $n_1, n_2, n_3 \dots$  モルから成り立っている体系が温度  $T$ , 圧力  $P$  にあるときの Gibbs' free energy を

$$G = G(T, P, n_1, n_2, \dots) \tag{2-43}$$

$T, P$  一定のまま  $n_1, n_2, \dots$  を  $\lambda$  倍すると,  $G = G(T, P, \lambda n_1, \lambda n_2, \dots) = \lambda G(T, P, n_1, n_2, \dots)$

これを  $\lambda$  で微分して  $\lambda \equiv 1$  とすると

$$\begin{aligned}
 G = G(T, P, n_1, n_2, \dots) &= \left( \frac{\partial G}{\partial n_1} \right)_{T, P, n_2, n_3, \dots} dn_1 + \left( \frac{\partial G}{\partial n_2} \right)_{T, P, n_1, n_3, \dots} dn_2 + \dots \\
 \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j (i \neq j)} &= \mu_i
 \end{aligned} \tag{2-44}$$

$$G = G(T, P, n_1, n_2, \dots) = n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 + \dots = \sum n_i \mu_i \tag{2-45}$$

$\mu_i$  を  $i$  番目の成分に対する Chemical potential という。

### 2.4.3 Maxwell's Relations

第二法則を表す式 (2-30) を第一法則の式 (2-7) に代入すると

$$dU = TdS - PdV \tag{2-46}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V & \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S &= \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} \\
 P &= - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S & - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_V &= \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}
 \end{aligned}$$

完全微分なら・・・  $\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_V$

式 (2-13) から  $dH = dU + PdV + VdP$

$$dH = TdS + VdP \quad (2-47)$$

$$\begin{aligned}
 T &= \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_P & \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_S &= \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial S} \\
 V &= \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_S & \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_P &= \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial P}
 \end{aligned}$$

完全微分なら・・・  $\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_S = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_P$

式 (2-35) から,

$$dA = -PdV - SdT$$

$$\begin{aligned}
 P &= - \left( \frac{dA}{dV} \right)_T & \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V &= \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial V} \\
 S &= - \left( \frac{dA}{dT} \right)_V & \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \frac{\partial^2 A}{\partial V \partial T}
 \end{aligned}$$

完全微分なら・・・  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T$

式 (2-40) から,

$$dG = VdP - SdT$$

$$\begin{aligned}
 V &= \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T & \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P &= \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} \\
 S &= - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_P & \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T &= - \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial T}
 \end{aligned}$$

完全微分なら・・・  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T$

式 (2-46) から  $dU = TdS - PdV$  , 静水圧を力の式に置き換えると

$$dU = TdS + \sum X_i dx_i$$

$$\begin{aligned}
 T &= \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{x_1 \dots x_n} & \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)_{x_j (j \neq i), S} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial S} \\
 X_i &= \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_{x_j (j \neq i), S} & \left( \frac{\partial X_i}{\partial S} \right)_{x_1 \dots x_n} &= \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial x_i}
 \end{aligned}$$

完全微分・・・  $\left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)_{x_j (j \neq i), S} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial S} \right)_{x_1 \dots x_n}$

式 (2-46) から  $H \equiv U + PV$ ,

$$H = U - \sum X_i x_i, \quad dH = dU - \sum X_i dx_i - \sum x_i dX_i, \quad dU = TdS + \sum X_i dx_i$$

$$dH = TdS - \sum x_i dX_i$$

$$T = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_{X_1 \dots X_n} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial X_i} \right)_{X_j (i \neq j), S} = \frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial S}$$

完全微分...  $\left( \frac{\partial T}{\partial X_i} \right)_{X_j (i \neq j), S} = \left( \frac{\partial x_i}{\partial S} \right)_{X_1 \dots X_n}$

$$x_i = \left( \frac{\partial H}{\partial X_i} \right)_{X_j (i \neq j), S} \quad \left( \frac{\partial x_i}{\partial S} \right)_{X_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial X_i}$$

式 (2-35) から,  $dA = -PdV - SdT$

$$dA = \sum X_i dx_i - SdT$$

$$X_i = \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \right)_{x_j (i \neq j), T} \quad \left( \frac{\partial X_i}{\partial T} \right)_{x_1 \dots x_n} = \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial x_i}$$

完全微分...  $\left( \frac{\partial X_i}{\partial T} \right)_{x_1 \dots x_n} = - \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} \right)_{x_j (i \neq j), T}$

$$S = - \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_{x_1 \dots x_n} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} \right)_{x_j (i \neq j), T} = - \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial T}$$

式 (2-40) から,  $dG = VdP - SdT$

$$x_i = - \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)_{X_j (j \neq i), T} \quad \left( \frac{\partial x_i}{\partial T} \right)_{X_1 \dots X_n} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial X_i}$$

完全微分...  $\left( \frac{\partial x_i}{\partial T} \right)_{X_1 \dots X_n} = \left( \frac{\partial S}{\partial X_i} \right)_{X_j (j \neq i), T}$

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{X_1 \dots X_n} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial X_i} \right)_{X_j (j \neq i), T} = \frac{\partial^2 G}{\partial X_i \partial T}$$

外からの仕事の式が静水圧の場合

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \quad \text{準静 Quasi-static, 断熱 Adiabatic} \quad (2-48)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \quad \text{準静 Quasi-static, 断熱 Adiabatic} \quad (2-49)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad \text{準静 Quasi-static, 等温 Isothermal} \quad (2-50)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \quad \text{準静 Quasi-static, 等温 Isothermal} \quad (2-51)$$

また外からの仕事の式が複数の力（一般系）の場合

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)_{x_j(j \neq i), S} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial S}\right)_{x_1 \dots x_n} \quad \text{準静 Quasi-static, 断熱 Adiabatic} \quad (2-52)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial X_i}\right)_{X_j(j \neq i), S} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial S}\right)_{x_1 \dots x_n} \quad \text{準静 Quasi-static, 断熱 Adiabatic} \quad (2-53)$$

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial T}\right)_{x_1 \dots x_n} = -\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)_{x_j(j \neq i), T} \quad \text{準静 Quasi-static, 等温 Isothermal} \quad (2-54)$$

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial T}\right)_{X_1 \dots X_n} = \left(\frac{\partial S}{\partial X_i}\right)_{X_j(j \neq i), T} \quad \text{準静 Quasi-static, 等温 Isothermal} \quad (2-55)$$

熱容量の差の式

式 (2-15), (2-16) および式 (2-30) より,

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$$

$$S(T, V): \quad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$$

$$S(T, P): \quad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP = \frac{C_P}{T} dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T}(C_P - C_V) &= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV \\ C_P - C_V &= T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{-T}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{-T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \\ \therefore \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V &= -1 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V &= \frac{-1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{-1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P} \end{aligned}$$

式 (2-4), (2-5), (2-6) より

$$C_P - C_V = \frac{-T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = \frac{TV^2 \beta^2}{\gamma V} = \frac{TV \beta^2}{\gamma} \quad (2-56)$$

#### 2.4.4 熱力学的変化の進む向きと関係式

(1) 第二法則の示す変化の進む向き

温度の違う二つの物体が接触すれば変化が起きるが、それは温度差を小さくするほうに進み、温度差を大きくする向きには進まない。実際に変化が起これば第二法則の式 (2-33)

$$\text{即ち} \quad \frac{d'Q}{T} < dS \quad \text{または} \quad d'Q < TdS \quad (2-57)$$

$$\text{可逆変化に近づけば} \quad \frac{d'Q}{T} \rightarrow dS \quad \text{または} \quad d'Q \rightarrow TdS \quad \text{となる。} \quad (2-58)$$

(2) 第一法則と Entropy

第一法則の式 (2-7) 即ち  $dU = d'Q + d'W$  を入れれば  $d'Q = dU - d'W$

$$\text{実際の変化では} \quad dU - d'W < TdS \quad \text{または} \quad dU - TdS < d'W \quad (2-59)$$

$$\text{変化が可逆に近づけば} \quad dU - TdS \rightarrow d'W \quad (2-60)$$

となる。



(3) 等温変化における Helmholtz 自由エネルギー

外界も体系も一定の温度にある場合 ( $dT = 0$  であるから) 式 (2-60) は

$$d(U - TS) < d'W$$

と書ける. 式 (2-34) Helmholtz' free energy から  $A = U - TS$

$$dA < d'W \quad (2-61)$$

等温で外界の仕事  $d'W$  が 0 であるときには

$$dA < 0, \quad \lim_{\text{Rev.}} dA = 0 \quad (2-62)$$

(4) 断熱変化における Entropy の表現

体系が断熱壁に囲まれている場合 ( $d'Q = 0$  であるから) で式 (2-57) から

$$0 < dS, \quad \lim_{\text{Rev.}} dS = 0 \quad (2-63)$$

体系が断熱壁に囲まれている (孤立系も同じ) では変化が起これば Entropy は必ず増加し, 変化が可逆に近づくほど Entropy の変化は 0 に近づく.

(5) 等温で力が一定である場合の Gibbs 自由エネルギー

等温で力が一定である場合  $d'W$  を力と変位の式に置き換えると式 (2-59) は

$$dU - TdS < \sum X_i dx_i$$

等温で  $X_1 \cdots X_n$  が一定ということは  $dT = 0, \quad dX = 0$  であるから.

$$d(U - TS - \sum X_i x_i) < 0 \quad (2-64)$$

$$dG < 0, \quad \lim_{\text{Rev.}} dG = 0 \quad (2-65)$$

すなわち力  $X_1 \cdots X_n$  が一定に保たれる等温変化が起きると体系の Gibbs' free energy は減少する. 可逆に近づくほど減少量は 0 に近づく.

## 2.4.5 相平衡

### 2.4.5.1 断熱系

ある与えられた状態  $P$  があり，断熱という束縛条件の範囲内でその周りの状態の Entropy  $S$  が今の状態の Entropy  $S_p$  よりも小さいときには，変化すれば  $S - S_p < 0$  となり Entropy は減ることが禁止されているのであるから体系はその状態から変化することはできない。

いま体系が二相からなり断熱という条件にしたがう範囲内で体系の与えられた状態とわずかに違う状態の体積，温度などの独立変数について一次の変分を考える。

$\delta S$  は一次の微小量の範囲で

$$\delta S < 0: \text{断熱平衡の条件} \quad (2-66)$$

ならばつりあう。また変分が正・負両方向にとれるときには一方向に  $\delta S < 0$  であるときには他方向には  $\delta S > 0$  であるから

$$\delta S = 0: \text{断熱平衡の安定条件} \quad (2-67)$$

でなければならない。

断熱壁に囲まれた一定体積の二相の物質のつり合いを考える。各々のモル数を  $n', n''$ ；おのおの，1モルの Entropy を  $S', S''$  とする。全体の Entropy は

$$S = n'S' + n''S'' \quad (2-68)$$

平衡条件は，

$$S'\delta n' + S''\delta n'' + n'\delta S' + n''\delta S'' = 0 \quad (2-69)$$

いま， $S', S''$  を1モルの体積，内部エネルギーを独立変数として

$$S' = S'(V', U'), \quad S'' = S''(V'', U'')$$

とする。式 (2-46) から

$$dU = TdS - PdV$$

$$dS = \frac{P}{T}dV + \frac{1}{T}dU + \dots \quad \left(\frac{\partial S'}{\partial V'}\right)_U = \frac{P'}{T'}, \quad \left(\frac{\partial S'}{\partial U'}\right)_V = \frac{1}{T'} \quad \text{であるから,}$$

$$\delta S' = \frac{P'}{T'}\delta V' + \frac{1}{T'}\delta U', \quad \delta S'' = \frac{P''}{T''}\delta V'' + \frac{1}{T''}\delta U''$$

式(2-69)に入れて

$$S'\delta n' + S''\delta n'' + n'\left(\frac{P'}{T'}\delta V' + \frac{1}{T'}\delta U'\right) + n''\left(\frac{P''}{T''}\delta V'' + \frac{1}{T''}\delta U''\right) = 0 \quad (2-70)$$

束縛条件は全体積一定で、内部エネルギー-Internal energy 一定（断熱、全体積一定で外からの仕事がない）であるから

$$\delta n' + \delta n'' = 0 \quad (2-71)$$

$$\delta(n'V' + \delta n''V'') = 0, \quad \dots V'\delta n' + V''\delta n'' + n'\delta V' + n''\delta V'' = 0 \quad (2-72)$$

$$\delta(n'U' + \delta n''U'') = 0, \quad \dots U'\delta n' + U''\delta n'' + n'\delta U' + n''\delta U'' = 0 \quad (2-73)$$

が成り立つ必要がある。Lagrange の未定定数法にしたがって、未定定数  $\lambda, \mu, \nu$  を使って式

(2-70)  $\times 1 +$  (2-71)  $\times \lambda +$  (2-72)  $\times \mu +$  (2-73)  $\times \nu$  をつくれば

$$\begin{aligned} & (S' + \lambda + \mu V' + \nu U')\delta n' + n'\left(\frac{P'}{T'} + \mu\right)\delta V' + n'\left(\frac{1}{T'} + \nu\right)\delta U' \\ & + (S'' + \lambda + \mu V'' + \nu U'')\delta n'' + n''\left(\frac{P''}{T''} + \mu\right)\delta V'' + n''\left(\frac{1}{T''} + \nu\right)\delta U'' = 0 \end{aligned}$$

$$T' = -\frac{1}{\nu} = T''$$

$$\frac{P'}{T'} = -\mu = \frac{P''}{T''}$$

$$S' - \frac{P'V'}{T'} - \frac{1}{T'}U' = -\lambda = S'' - \frac{P''V''}{T''} - \frac{1}{T''}U''$$

したがって  $T' = T'', P' = P'', U' - T'S' + P'V' = U'' - T''S'' + P''V''$

$$\text{すなわち,} \quad T' = T'', P' = P'', G' = G'' \quad (2-74)$$

### 2.4.5.2 等温等積の場合

二相からなる体系の外からの仕事を0とすると、変化の進む向きは式(2-62)から

$$dA < 0, \quad \lim_{\text{Rev.}} dA = 0$$

変化が起きるとき Helmholtz' free energy は減少する一方である。

与えられた状態とわずかな状態を比べるととき  $A$  が最小すなわち

$$\delta A > 0$$

であるか、または状態のずれかたが正にも負にもとれるとき  $A$  の1次の変分について

$$\delta A = 0: \text{平衡条件}$$

で2次の変分について

$$\delta^2 A > 0: \text{平衡の安定条件}$$

であるとき体系はつりあいにある。

恒温槽に入って温度が一定の状態に置かれた二相の物体を考える。全体の  $A$  は

$$A = n'A' + n''A''$$

平衡条件は

$$A'\delta n' + A''\delta n'' + n'\delta A' + n''\delta A'' = 0 \quad (2-75)$$

$A' = A'(V', T')$ ,  $A'' = A''(V'', T'')$ ,  $dA = \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V dT$  を考えると

$$\delta A' = \left(\frac{\partial A'}{\partial V'}\right)_T \delta V' + \left(\frac{\partial A'}{\partial T'}\right)_V \delta T'$$

式(2-47) から  $dA = -PdV - SdT$

$$\delta A' = -P'\delta V'$$

$$\delta A'' = -P''\delta V''$$

これらを式(2-75) にいれると

$$A'\delta n' + A''\delta n'' - n'P'\delta V' - n''P''\delta V'' = 0 \quad (2-76)$$

束縛条件は

$$n' + n'' = \text{Const. すなわち } \delta n' + \delta n'' = 0 \quad (2-77)$$

$$n'V' + n''V'' = \text{Const. すなわち } V'\delta n' + V''\delta n'' + n'\delta V' + n''\delta V'' = 0 \quad (2-78)$$

Lagrange の未定定数法により (2-76)  $\times 1 +$  (2-77)  $\times \lambda +$  (2-78)  $\times \mu$  をつくり

$$(A' + \lambda + \mu V')\delta n' + (A'' + \lambda + \mu V'')\delta n'' + n'(-P' + \mu)\delta V' + n''(-P'' + \mu)\delta V'' = 0$$

$$P' = \mu = P''$$

$$A' + P'V' = -\lambda = A'' + P''V''$$

$$\therefore P' = P'', \quad G' = G'' \quad (2-79)$$

### 2.4.5.3 等温等圧の場合

等温で力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が一定 (静水圧では圧力一定) の場合には式 (2-64), (2-65)

により, 体系が平衡になく変化が進行するとき, Gibbs' free energy  $G$  は減少する一方である。したがって  $G$  が極小であるとき, すなわち,

現在の状態とわずがちがう付近の任意の状態に対して

$$\delta G > 0$$

であるか, 独立変数の変分の一次の項についての  $G$  の変分で, しかも 1 次の変分

$$\delta G = 0: \text{平衡条件}$$

でしかも 2 次の変分について

$$\delta^2 G > 0: \text{平衡の安定条件}$$

が成り立つとき体系が平衡にある。

全体の温度  $T$  を一定に, 圧力を一定値  $P$  に保つ系を考える。体積は一定でなくてよい。

このときは変えることのできる量は  $n', n''$  だけである。

$$\delta(n'G' + n''G'') = 0$$

したがって

$$G'\delta n' + G''\delta n'' + n'\delta G' + n''\delta G'' = 0 \quad (2-80)$$

$$G' = G'(P, T), G'' = G''(P, T), \dots dG = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P dT \quad (2-81)$$

において  $dP = 0$ ,  $dT = 0$  ということは  $dG = 0$  であり,  $\delta G' = 0$ ,  $\delta G'' = 0$

したがって式 (2-80) は

$$G'\delta n' + G''\delta n'' = 0 \quad (2-82)$$

束縛条件は

$$\delta n' + \delta n'' = 0 \quad (2-83)$$

$\delta n' = -\delta n''$ , これを (2-82) にいれて

$$n'(G' - G'') = 0$$

$$G' = G''$$

式 (2-40) から

$$dG = VdP - SdT$$

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T, S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P \quad (2-84)$$

式 (2-81) と (2-84) より

$$V'dP - S'dT = V''dP - S''dT$$

$$\frac{dP}{dT} V' - V'' = S' - S''$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S' - S''}{V' - V''}$$

式 (2-30) から,  $d'Q = TdS$ : Rev.

潜熱 Latent heat を  $L$  とすると次の Cleparon-Clausius の式が導かれる.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V' - V'')} \quad (2-85)$$

## 2.4.6 Chemical potential と関連する関係式

### 2.4.6.1 開いた系における相平衡と Gibbs' phase rule

一つの体系がまわりの物体（物質源，粒子源）と物質（分子）の交換ができるとき，つりあうための条件は体系の Chemical potential がまわりの物質源の Chemical potential に等しいことである。

式 (2-44) , (2-45) から，

$$G = G(T, P, n_1, n_2, \dots) = n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \dots = \sum n_i\mu_i \quad (2-86)$$

$T, P, n_1, n_2, \dots$  全部を微小量かえたときの  $G$  の変化は

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P, n_i} dT + \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T, n_i} dP + \sum \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j (j \neq i)} dn_i$$

式 (2-41), (2-44) から

$$dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i dn_i$$

一方 (2-86) から

$$dG = \sum n_i d\mu_i + \sum \mu_i dn_i$$

したがって

$$-SdT + VdP - \sum n_i d\mu_i = 0 \quad (2-87)$$

$d\mu_i$  は  $T, P, n_i$  を変えたときの  $\mu_i$  の変化である。特に  $T, P$  を一定にして  $n_i$  だけを変化させるとき

$$\sum n_i d\mu_i = 0 \quad (2-88)$$

式 (2-87), (2-88) は Gibbs-Duhem の式といわれる。

温度  $T$  圧力  $P$  一定で分子の出入りのある場合も Gibbs の関数が最小値をとるのがつりあ条件である。

$$\delta G(T, P, n_1', n_2', \dots, n_1'', n_2'', \dots) = 0$$

成分の数を  $\alpha$  , 相の数を  $\beta$  とすると全体系の  $G$  は, 各相の  $G$  の和であるから

$$G = G(T, P, n_1', n_2', \dots) + G(T, P, n_1'', n_2'', \dots) + \dots = \sum_{i,k} G^{(l)}(T, P, n_i^{(l)})$$

任意の 2 相のつり合いについて考えると,  $l$  番目の相に  $i$  番目の成分が  $\delta n_i^{(l)}$  入るときの

$G$  の増加は

$$\frac{\partial G^{(l)}}{\partial n_i^{(l)}} \delta n_i^{(l)} = \mu_i^{(l)} \delta n_i^{(l)}, \quad \mu_i^{(l)}: l \text{ 番目の相に対する } i \text{ 番目の成分の Chemical potential}$$

$\mu_i^{(l)}$  がどの相についても等しければ,  $i$  番目の成分が少量だけ任意の一つの相から他の相に

移っても  $G$  の変化はない。(各成分の Chemical potential は各相で等しい)

$$\mu_i' = \mu_i'' \dots \mu_i^{(l)} \dots = \mu_i^{(\beta)}, \quad : \text{平衡条件}$$

この場合式の数  $\mu_i^{(l)} = \mu_i^{(l+1)}$  は, 相の数から 1 をマイナスした個数になり, 全成分について

てはその  $\alpha$  倍,  $(\beta-1)\alpha$  個, 一方

$$\mu_i^{(l)} = \mu_i^{(l)} \left[ P, T, \left( n_1^{(l)} / n_2^{(l)} \right), \dots, \left( n_i^{(l)} / n_{i+1}^{(l)} \right), \dots, \left( n_{\alpha-1}^{(l)} / n_{\alpha}^{(l)} \right) \right]$$

について  $(n_1^{(l)} / n_2^{(l)})$  の数は  $(\alpha-1)$ , 全相では  $(\alpha-1)\beta$  個となる。

平衡条件を満足しながら (等しくなる変数を引いて) 自由にとることのできる変数の数は

$T, P$  を入れて

$$f = 2 + (\alpha-1)\beta - (\beta-1)\alpha = \alpha + 2 - \beta \quad (2-89)$$

$$\alpha + 2 - \beta \geq 0 \quad (2-90)$$

式 (2-89), (2-90) を Gibbs の相律 Gibbs' phase rule と呼ばれる。



2.4.6.2 関連する関係式

式 (2-12) および (2-30) より

$$c_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$$

$$H = H_0 + \int_{T_0}^T c_p dT$$

$$S = \int_{T_0}^T \frac{c_p}{T} dT + f(P)$$

$P$  で微分すると

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = \frac{df(P)}{dP}$$

式 (2-51) より

$$-\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = \frac{df(P)}{dP}$$

$$PV = nRT \quad V = \frac{nRT}{P} \quad -\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{nR}{P}$$

$$\frac{df(P)}{dP} = -\frac{nR}{P} \quad f(P) = -nR \log(P) + C$$

$$S = S_0 + \int_{T_0}^T \frac{c_p}{T} dT - R \log \frac{P}{P_0}$$

$$G = H - TS = H_0 - TS_0 + \int_{T_0}^T c_p dT - T \int_{T_0}^T \frac{c_p}{T} dT + RT \log \frac{P}{P_0} \quad (2-91)$$

式 (2-44), (2-45) より

$$\mu_i = \varphi_i(T, P) + RT \log x_i, \quad x_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

ただし

$$\varphi_i(T, P) = H_{i0} - TS_{i0} + \int_{T_0}^T c_{p_i} dT - T \int_{T_0}^T \frac{c_{p_i}}{T} dT + RT \log \frac{P}{P_0}$$

$i$  番目の気体が単一にあって標準の圧力  $P_0$  のときの  $\mu_i$  を  $\mu_{i0}$  とすれば

$$\mu_{i0} = \varphi_i(T, P_0) = H_{i0} - TS_{i0} + \int_{T_0}^T c_{Pi} dT - T \int_{T_0}^T \frac{c_{Pi}}{T} dT$$

理想気体の定圧比熱は圧力によらないから

$$RT \log \frac{Px_i}{P_0} = \mu_i + RT \log \frac{P_i}{P_0}, \quad P_i : i \text{ 番目の気体の分圧}$$

不完全気体の混合気体の場合には

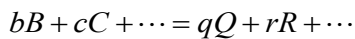
$$\mu_i(T, P) = \mu_{i0}(T, P_0) + RT \log \frac{P_i^*}{P_0} \quad (2-92)$$

で逃散能 Fugacity を定義する。ただし混合物の全体の圧力が 0 に近づくと  $P_i^* \rightarrow P_i$  に近づ

くように  $\mu_{i0}$  をきめるものとする。 [4]

理想気体の混合物おのこの成分の Fugacity は分圧と等しい。溶液や固体の混合物（固溶体）の場合には、おのこの成分の Chemical potential  $\mu_i$  に対して (2-87) によって Fugacity が定義される。

$n$  当量の電気が一定方向に流れるときの反応が



であるような電池に対し

エネルギー式は

$$\mu = \mu_0 + RT \log \frac{a_Q^q a_R^r \dots}{a_B^b a_C^c \dots} \quad (2-93)$$

そして、 $\mu = -nFE$  であるから ( $F$  : Faraday const.  $E$  : Electrode potential)

$$E = E_0 + \frac{RT}{nF} \log \frac{a_Q^q a_R^r \dots}{a_B^b a_C^c \dots} \quad (2-94)$$

## 2.5 熱処理における伝熱挙動

熱処理業界においても小型、高強度、高精度などの技術を革新的レベルで求められ、開発競争が展開されている。高強度化は熱処理ひずみを増大させ精度は悪化させる傾向にある。そのため熱処理油の種類、流量・流速、治具や温度など様々な設定の変更で対応し解決していく必要があるが、経験が通じない中での問題解決は困難を極める課題といえる。

このような状況下、新規部品を未知の工程で生産するときの形状・強度予測を可能にするCAE・熱処理シミュレーション<sup>[2-6]</sup>への期待は大きい。

液体プール冷却は、気体冷却には望めない液化潜熱を利用できる効率の良い冷却方法といえる。しかし蒸気膜が残留し冷却能低下を招くといった冷却阻害・変動要因も合わせ持つ。そのような液体熱処理油を冷却剤とする工程に熱処理シミュレーションを適用する意義はさらに大きいものがあるといえる。

## 2.6 熱処理における冷却

鋼の焼入れの目的は鋼を急冷することによって、硬化させ、高強度材料にかえることである。この焼入れ硬化は、過冷却オーステナイトからフェライト、パーライト、上部ベイナイトなどの変態を避け、マルテンサイト組織を得ることにより達成される。式(2-92)に示す多成分の相平衡を考慮

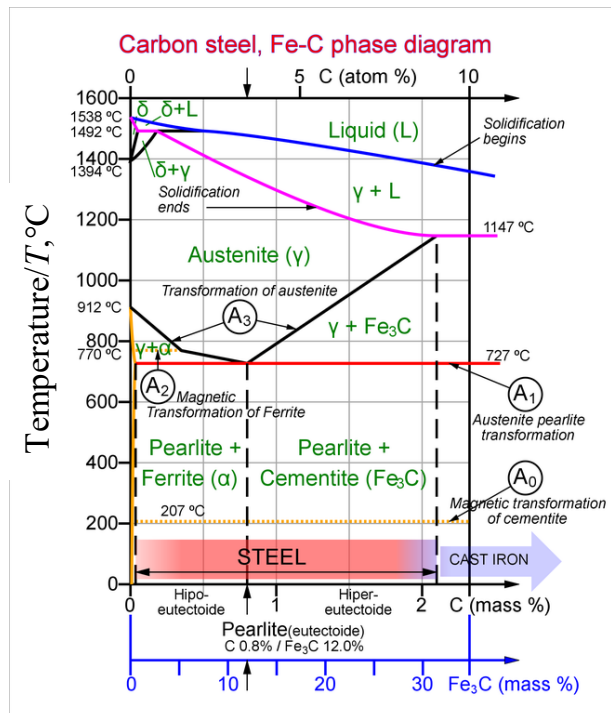


Fig. 2.1 Carbon steel Fe-C phase diagram<sup>1</sup>

して作成される Fig. 2.1<sup>1</sup>の鉄-炭素系平衡状態図には、目指すマルテンサイト組織は表わされていない。fcc のオーステナイト ( $\gamma$ ) 組織からの原子の拡散を伴わないマルテンサイトへの変態は、 $\gamma$  に固溶していた C が過飽和に固溶する、組成変化のない平衡状態図には示されない、準安定組織変態である。正確には多くの C 侵入形態があり、bcc

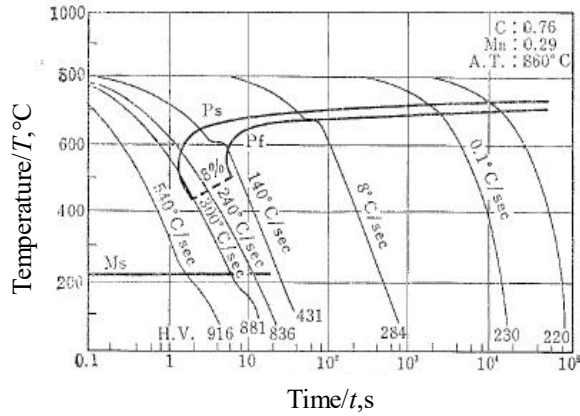


Fig. 2.2 0.76C% carbon steel continuous cooling-transformation (CC-T) diagram<sup>2</sup>

の一軸だけを伸ばす高密度の格子欠陥を含む bct 構造を示す  $\alpha'$ (bcc, bct) などがある。変態速度が音速の 1/3 倍で速く硬いという特徴がある<sup>[7]</sup>。拡散もなく組成変化もないため変態速度も大きい。鋼でマルテンサイト組織を得るには Fig. 2.2<sup>2</sup>の 0.76%炭素鋼の CCT 曲線で見ると、パーライト変態のノーズを切る冷却速度 300°C/s 付近が上部臨界冷却速度で、540°C/s であれば目的のマルテンサイト組織を得ることができるとわかる。

このように目的の焼入れを行うためには適切な冷却速度を得る必要がある。冷却速度は冷却剤の種類に大きく依存し、冷却材の温度、攪拌速度などの影響も受ける。

## 2.7 冷却剤（焼入れ油）の冷却性

焼入れ油といわれる冷却剤には様々なものがあり、鉱物油を主原料とするものが、浸炭焼入れや大型の油浸漬炉、連続のメッシュベルト炉用に、高周波焼入れにはグリコールポリマーを配合した水系熱処理液が使用される。鉱物油系は 80°C以下の液温で使用されるコール

<sup>1</sup> [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steel\\_Fe-C\\_phase\\_diagram-eu.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steel_Fe-C_phase_diagram-eu.svg) (03/03-2020)

<sup>2</sup> <https://daiichis.work/word/r10.html>(03/03-2020)

## 第2章 熱処理関連基礎理論

ドクエンチ油と 120～200°Cで使用されるホットクエンチがあり、前者は低炭素鋼を急冷し焼き入れるほかメッシュの連続焼入れ設備、軸受けを急冷し HRC63 まで焼き入れるなど広い用途で使用される。またホットクエンチ油は主に自動車の駆動系歯車の浸炭焼入れなどの焼入れ鋼の精密焼入れ、建設機械、船舶用の大型機械部品の焼入れなどにもちいられる。両者は沸点範囲が異なり、高温になるほど低粘度になる油の特性から使用温度における粘度が4～15mm<sup>2</sup>/sになるように設定され使用されている。油の温度を上げると粘度が低下し、攪拌効率も上り焼入れ性を高める効果や、通常から高めの温度で使用している場合は、さらに温度を上げて攪拌を弱めることで冷却能を低下させ焼入れ性を低下させるなど、様々な使い方がある。また、沸点の低いコールド油は急冷できるという性質の反面、蒸気膜を作りやすく冷却むらを起こし易い側面がある。これに対し沸点が高いために蒸気圧が低く蒸気膜を作りにくいホット油は蒸気膜の停滞による冷却むらを起こしにくくひずみ(変形)が安定しており、予期しない焼入れひずみを低減する効果がある。ハイポイドギヤの浸炭焼入れなどで熱処理工程後の歯研(歯面研削工程)を省略できる例も報告されている。

このような冷却剤の性能を再現性良く定量的に測定する冷却曲線測定方法が確立されている。

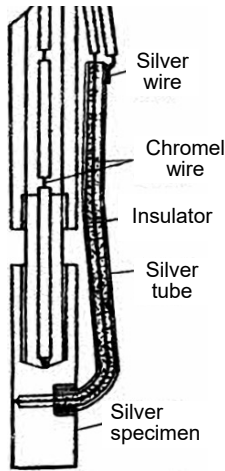


Fig. 2.3 Silver cylindrical specimen (Improved type)<sup>3</sup>

## 2.8 冷却曲線測定装置

特に銀円柱表面直下に Fig. 2.3<sup>3</sup>に示すようにクロメル線を硝酸銀溶液で溶着させるテクニック用いた銀-クロメル改良型熱電対試験片<sup>[8]</sup>は、銀棒自体が熱電対を形成し、優れたレスポンスで急冷の状況を測定できる。現在の銀-アルメル JIS K 2242 に規定される方法<sup>[9]</sup>の原型となった。

### 2.8.1 冷却剤の特性を示す冷却曲線

#### 2.8.1.1 沸騰と対流挙動

田村式銀棒試験片を用いて測定された冷却曲線を Fig. 2.4<sup>4</sup>に示す。表面で測定した左側曲線には冷却勾配の小さいIIの蒸気膜段階が観測されている。同時に行った「活動写真観察」で、蒸気膜に覆われた試験片を「ピントの外れたように写り、しかも異様に輝いている」と表現されている。

この蒸気膜段階の前段には「0.05s 冷却は比較的早い、試験片および影にあまり変化がない」第I段階があるという記述がある。0.4s 付近から蒸気膜は崩壊し「試験片表面に猛烈な沸騰が起こり気泡が飛散し、対流は非常に広範囲におこり水はさかんに攪拌されている」、という第III段階のはじめの段階を経て「温度

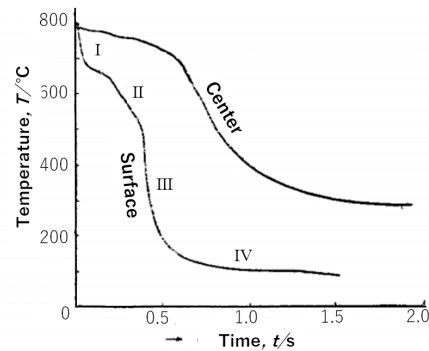


Fig. 2.4 The cooling curves of surface and center of specimen in distilled water; Bath temperature: 20°C, Quenching temperature: 800°C. <sup>4</sup>

<sup>3</sup> 多賀谷 正義, 田村 今男, “焼入冷却剤の研究 (第6報) 濃厚水溶液の冷却能” 日本金属学会誌, 第16巻 第12号, pp. 652, Fig.2 (1952).

<sup>4</sup> 多賀谷 正義, 田村 今男, “焼入冷却剤の研究 (第2報) 実験装置,” 日本金属学会誌, 第B-15巻, 第11号, pp. 539, Fig.2 (1951).

が次第に降下するにしたがって対流も次第におこらなくなる。沸騰は弱くなり焼入れ後約0.7sでほとんど沸騰はおこらなくなる。」「第IV段階では対流は広範囲に及んでいるが試験片表面では特別な変化が認められない。」<sup>[10]</sup>とある。IIを蒸気膜段階、IIIを沸騰段階、IVを対流段階と記された<sup>[10]</sup>。なお、円柱の中心部を測定している図中右側の曲線には第一沸騰段階は観察されない。中心部では変曲点も表面より相当にぶい変化となっており、特性温度としては20~30°C高い温度として測定されている。

なお、蒸気膜が崩壊し沸騰段階に入る温度を特性温度、(Characteristic temperature)と呼ぶ<sup>[11]</sup>また、IVの対流段階に入る変曲点については、「対流段階開始温度」と記された<sup>[11]</sup>。

前者は蒸気膜が生成されそれによって熱源物体から液体が分離され熱が伝わりにくくなる Leidenfrost 現象<sup>[12]</sup>、後者は蒸気が液化する沸点に関する特性値と考えられる。蒸気膜による固/液分離(熱伝達を阻害する)状態になる固体表面(熱源)の最低温度である Leidenfrost 温度<sup>[12]</sup>は、蒸気膜が安定化している最低温度と解釈でき、したがって特性温度よ

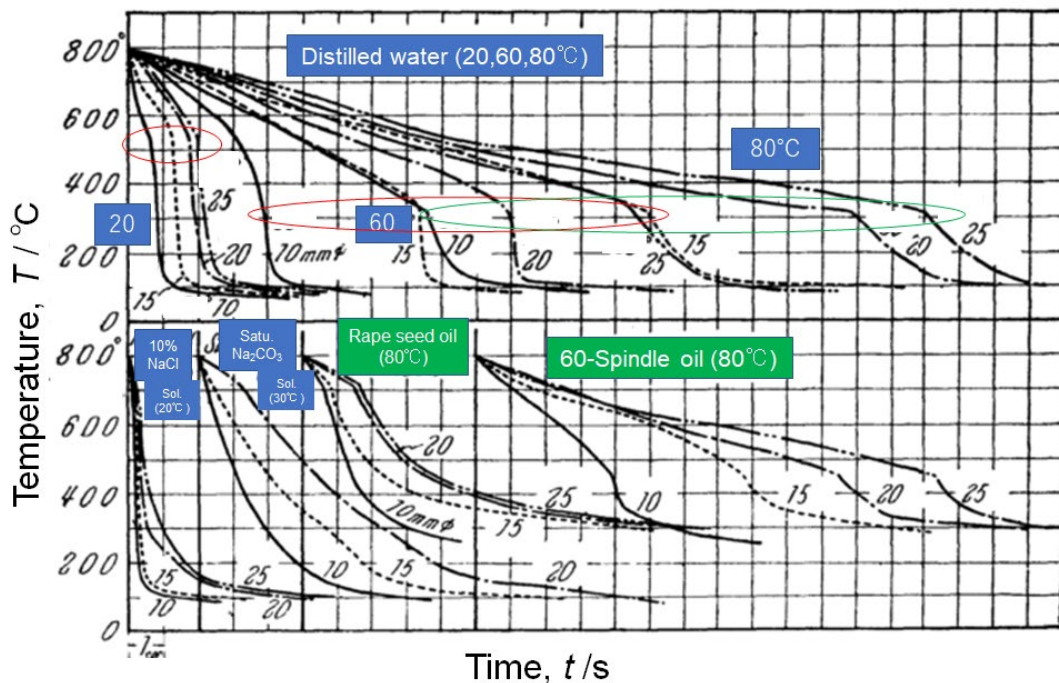


Fig. 2.5 Surface cooling curves during quenching from 800°C into various coolants<sup>5</sup>. Characteristic temperature shows a constant value regardless of the diameter,  $\Phi$  of the cylindrical specimen ( $\Phi = 10, 15, 20, 25$  mm).

り 10~20°C高い温度と考えられる。また沸騰段階開始温度は水の場合、100°Cの沸点より 10~20°C高い温度から変化が現れることが Fig. 2.5<sup>5</sup>からわかる。このような冷却過程において、実際の沸点より高い温度・圧力を示す飽和温度、飽和圧力<sup>[13,14]</sup>の現象を考慮すると、水の場合の沸点（100°C）到達以前から始まる変化と解釈できる。植物油や鉱物油の場合は、様々な分子量を持つ天然物質を精製してあるため、沸点も一様ではなく沸点範囲を持つ。したがって Fig. 2.5 に示される植物油と鉱物油の対流段階開始温度は、飽和温度、飽和圧力の現象に加え一定の沸点範囲を有するため、よりなだらかな変化として観測されると解釈される。

### 2.8.1.2 特性温度一定の原則

銀棒試験片の直径  $D$  を 10, 15, 25, 25mm で実験を行い Fig. 2.5 のように直径の変更に対して特性温度と対流段階開始温度は変わらないことが示された<sup>[15]</sup>。

### 2.8.1.3 冷却特性と焼入れ性

銀棒試験片は、銀と鋼では前述したように熱伝導度  $k$  が大きく異り、冷却速度の絶対値は鋼のそれとは大きく異なるため、TTT 曲線や CCT 曲線に直接あてはめて焼入れ性を検討することはできない。

### 2.8.1.4 冷却試験における再現性の向上について

銀棒試験片は、熱処理油剤メーカーの手により再現性向上と繰り返し使用できる回数向上を求め改良が施され、現在は JIS K 2242<sup>[9]</sup>に規定されるものとなった。

また、表面の性質が比較的鋼に近い、Ni 基合金製（インコネル 600）の耐久性に優れるクエンチオメータ<sup>[16]</sup>も開発され冷却剤の冷却特性を求める目的に使用されている。

---

<sup>5</sup> 多賀谷 正義, 田村 今男, “焼入冷却剤の研究 (第 8 報) 銀試片の寸法による冷却過程の変化”, 日本金属学会誌, 第 20 巻, 第 3 号, pp. 124-128, (1955) .



## 2.9 熱処理シミュレーションへの期待

### 2.9.1 基本原理

上述のように冷却剤の冷却時における冷却特性は、銀やインコネル試験片によって再現性よく測定できるようになった。特に銀試験片の場合、蒸気膜に覆われる膜沸騰から特性温度を経て核沸騰の急冷上状態となりその後は緩やかに冷却される対流段階に至る冷却剤に固有の変化を捉えることがきる。しかしその変化は鋼の内部の変化や大きさにより異なる状況を反映するものではない。

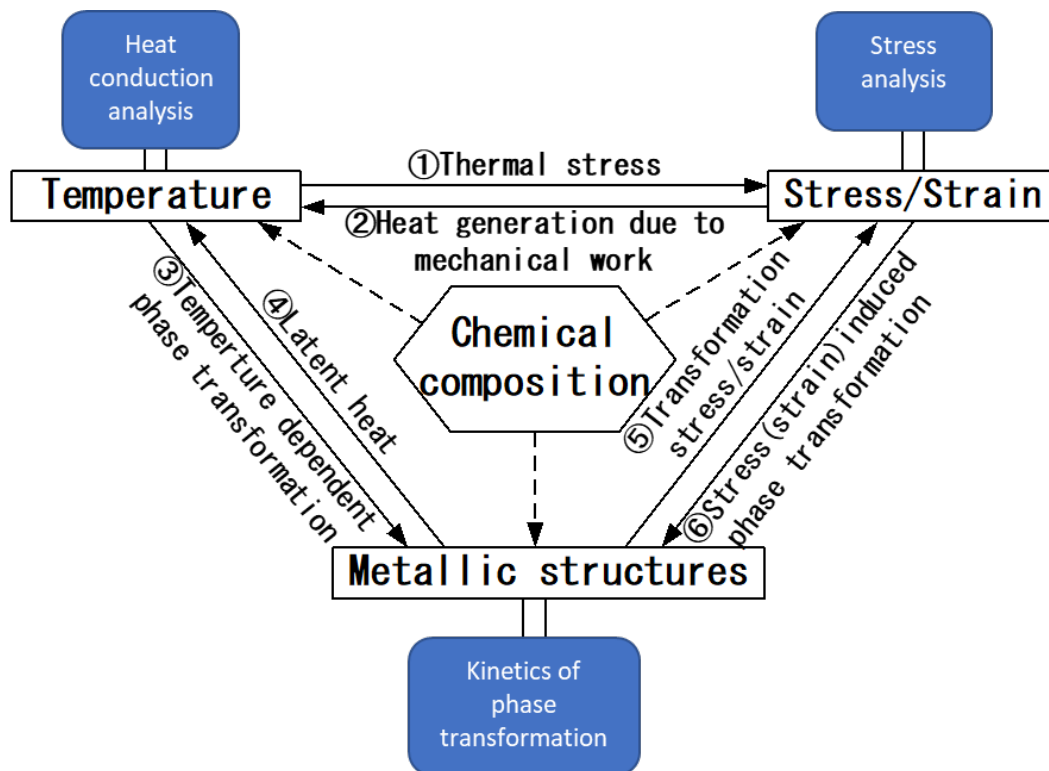


Fig. 2.6 Metallo-thermo-mechanical coupled analysis and effect of chemical composition.

熱処理では固相と液相，固相内部での変態があり，材料には組織や構造に変化が起きる。多くの異なる相の間では式 (3-30) に示したケミカルポテンシャルが等しくなるような相平衡が成り立つ拡散や相変態が起きる。また原子の拡散を伴わずにせん断的に結晶構造が

変化し母相  $\gamma$  に固溶していた炭素 C の  $\alpha$  相へ過飽和固溶の起きるマルテンサイト変態のような準安定組織が出現する変態などもある<sup>[7]</sup>。このような相変態は温度の変化によってもたらされ、このときの熱膨張や収縮で熱応力が発生する。相変態が起きると体積の違いから変態応力も発生する。また変態に伴い潜熱の発生と吸収も起きて、温度分布に影響を及ぼす。また相変態の挙動はそこに生ずる応力/ひずみに影響を与える。

このように、組織、温度、応力/ひずみは相互作用を繰り返しながら変化は進行する。

熱処理シミュレーションはこのようなプロセスに従って進行させる必要がある。近年、この熱処理過程を解析し、計算上で再現させていく試みが行われるようになった。それは Fig.6 の外側のように、熱伝導解析、応力解析、変態のカイネティクスの式を独立に解くのではなく、質量、運動量、角運動量、とエネルギーの保存則を適用しながら解いていく方法である。基本的には、式 (3-4) に示した熱力学第一法則でつり合いを (3-14) の第二法則で変化の進む向きを決定しながら有限要素法を適用し解いていく。具体的には、連続体熱力学の立場時から統一的に捕え、熱・温度、変態、応力・ひずみの3種の連成を考慮した支配方程式を導出し、これに従ってシミュレーションを進めていく手法である。

全体は変態・熱・力学 (metallo-thermo-mechanics) として構築されている<sup>[17-22]</sup>。

### 2.9.2 CAE システム熱処理シミュレーションの開発

こうした基礎研究をもとに、熱処理専用 CAE システム HEARTS (HEAt tReatment Simulation system)<sup>[第1章 17], [2-5]</sup>が開発された。これを契機に、日本では GRANTS, QUESS, FINAS-TIPS がリリースされ<sup>[第1章 5-10]</sup>、COSMAP<sup>[第1章 22]</sup>が新しく HEARTS にかわるものとしてリリースされた。

これらのシミュレーションを実行するためには目的とする材料のデータ、特に温度依存データがそろっている必要がある。これについては (社) 日本材用学会塑性加工部門委員会において、分科会を設置し多くの産、官、学の期間協力によって熱処理シミュレーションのためのデータベース構築を行ってきた<sup>[23,24]</sup>。

第 2 章参考文献

- [1] 原島 鮮：熱力学統計力学，培風館，pp. 1-137 (1970).
- [2] T. Inoue, K. Arimoto and D. Y. Ju: Proc. 3<sup>rd</sup> int. Conf., Residual Stresses, p.226(1991)
- [3] T. Inoue, K. Arimoto and D. Y. Ju: Proc. 1st int. Conf., Quenching and Control of Distortion, pp.205(1992)
- [4] T. Inoue, K. Arimoto and D. Y. Ju: Proc. 8st int. Conf., Heat Treatment of Materials, p.569(1992)
- [5] 井上達雄，有本亨三：材料，44，496，pp.103(1995)
- [6] 上原卓也，井上達雄：材料，44，498，pp.309(1995)
- [7] 牧正志：“鉄鋼の相変態－マルテンサイト変態 I－鉄合金のマルテンサイト変態の特徴－”，まてりあ，54，11，pp. 557-655 (2015).
- [8] 多賀谷正義，田村今男：“焼入冷却剤の研究（第 6 報）濃厚水溶液の冷却能” 日本金属学会誌，16，12，pp. 652-955 (1952).
- [9] JIS (Japanese Industrial Standards)：“JIS K 2242 A 法” (2012).
- [10] 多賀谷正義，田村今男：“焼入冷却剤の研究（第 2 報）実験装置，”，日本金属学会誌，B-15，11，pp. 535-537 (1951).
- [11] 多賀谷正義，田村今男：“焼入冷却剤の研究（第 3 報）焼入過程の理論的考察”，日本金属学会誌，B-15，12，pp. 589-594 (1951).
- [12] 甲藤好郎：“沸騰の科学（6）”，J.HTSJ，Vol.45，No.191，pp. 29-34 (2006).
- [13] 甲藤好郎：“沸騰の科学（1）”，J.HTSJ，Vol.44，No.186，pp. 38-42, (2005).
- [14] 甲藤好郎：“沸騰の科学（2）”，J.HTSJ，Vol.44，No.187，pp. 15-20 (2005).
- [15] 多賀谷正義，田村今男：“焼入冷却剤の研究（第 8 報）銀試片の寸法による冷却過程の変化”，日本金属学会誌，20，3，pp. 124-128 (1955).
- [16] ISO 6743-14：“クエンチオメータ”(1994).

- [17] T. Inoue and K. Tanaka: An Elastic-plastic Stress Analysis of Quenching when Considering a Transformation, Int. J. Mech. Sci., Vol.17, pp.361-367(1975)
- [18] 門河昌弘, 長岐滋, 井上達雄; “鋼の焼入れと低温やきもどしにおける組織変化と応力の解析”, 材料, 29, 327, pp. 1179-1179 (1980).
- [19] S. T. a. M. T. Inoue; “Description of Transformation Kinetics, Heat Conduction and Elastic-plastic Stresses in the Course of Quenching and Tempering of Some Steels, ” Ingenieur-Archiv, 第 50 卷, 第 5, pp. 315-327, (1981).
- [20] T. Inoue: Inelastic Constitutive Relationships and Applications to Some Thermomechanical Processes Involving Phase Transformation, North-Holland: Ed. by Richard B. Hetnarski, (1988).
- [21] 井上達雄, 田中喜久昭, 長岐滋: 個体力学と変態塑性の解析, 大河出版, (1995).
- [22] M. a. T. G. Totten: “Transformation and Distortion in Steel, Chapter 16, ”: Handbook of Residual Stress, ASM-International, (2002).
- [23] T. Inoue and K. Okamura, Material Database for simulation of Metallo-thermo-mechanical Fields, Proceedings of 5<sup>th</sup> International Symposium on Quenching and Distortion control, ASM, St. Louis, 2000, pp.753-760, (2000)
- [24] 材料学会分科会: “熱処理シミュレーションのためのデータベース構築”.  
<http://sosei.jsms.jp/datab/MATEQ/mateq.html>, 熱処理シミュレーションのための材料データベース「MATEQ」  
<http://sosei.jsms.jp/datab/MATEQ/MATEQver3.0X.pdf> (2019)

## 第3章 円柱試験片による測定・熱解析方法

<a href="#">3.1</a>	<a href="#">熱処理用冷却剤の熱伝達率の同定</a>	49
<a href="#">3.1.1</a>	<a href="#">概要</a>	49
<a href="#">3.1.2</a>	<a href="#">はじめに</a>	49
<a href="#">3.1.3</a>	<a href="#">熱伝達率同定の方法</a>	51
<a href="#">3.1.3.1</a>	<a href="#">冷却曲線の測定</a>	51
<a href="#">3.1.3.2</a>	<a href="#">冷却剤</a>	52
<a href="#">3.1.4</a>	<a href="#">熱伝導方程式</a>	53
<a href="#">3.1.4.1</a>	<a href="#">熱流束ベクトル (Heat flux vector)</a>	53
<a href="#">3.1.4.2</a>	<a href="#">熱伝導方程式 (The differential equation of heat conduction)</a>	54
<a href="#">3.1.4.3</a>	<a href="#">円柱座標への変換</a>	55
<a href="#">3.1.4.4</a>	<a href="#">変数分離</a>	58
<a href="#">3.1.4.5</a>	<a href="#">熱伝達率の同定</a>	63
<a href="#">3.1.4.6</a>	<a href="#">熱伝達率同定の数値計算について</a>	66
<a href="#">3.1.5</a>	<a href="#">測定結果</a>	66
<a href="#">3.1.5.1</a>	<a href="#">冷却曲線</a>	66
<a href="#">3.1.5.2</a>	<a href="#">コールドクエンチ油の熱伝達率</a>	68
<a href="#">3.1.5.3</a>	<a href="#">マルクエンチの効果</a>	70
<a href="#">3.1.6</a>	<a href="#">同定値の検証</a>	70
<a href="#">3.1.7</a>	<a href="#">銀円柱試験片への鉄めっきの影響</a>	73
<a href="#">3.1.8</a>	<a href="#">鉄めっき銀試験片</a>	73
<a href="#">3.1.9</a>	<a href="#">鉄めっき銀試験片の実験結果</a>	74
<a href="#">3.1.9.1</a>	<a href="#">鉄めっき銀試験片の冷却曲線測定結果</a>	74

### 第3章 円柱試験片による測定・熱解析方法

3.1.9.2	<u>鉄めっき銀試験片の熱伝達率曲線 <math>h_{Fe}(T)</math></u> .....	75
3.1.10	<u><math>h_{Fe}(T)</math> による熱伝達率熱処理シミュレーション</u> .....	75
3.1.11	<u>銀試験片と鉄めっき銀試験片の違いについて</u> .....	79
3.1.12	<u>鋼における表面と内部の温度差</u> .....	79
3.1.13	<u>銀試験片を用いた実験のまとめ</u> .....	79
3.2	<u>SUS303 円柱試験片による実験</u> .....	81
3.2.1	<u>背景と目的</u> .....	81
3.2.2	<u>実験方法</u> .....	82
3.2.2.1	<u>冷却曲線</u> .....	82
3.2.2.2	<u>実験装置</u> .....	82
3.2.2.3	<u>可視化観察（高速度 4K ビデオ画像撮影）</u> .....	82
3.2.2.4	<u>熱伝達率の同定・算出と熱処理シミュレーション</u> .....	84
3.2.3	<u>結果と考察</u> .....	84
3.2.3.1	<u>冷却曲線測定結果</u> .....	84
3.2.3.2	<u>可視化実験の結果</u> .....	86
3.2.3.3	<u>熱伝達率とシミュレーション結果</u> .....	88
3.2.4	<u>結果のまとめと考察</u> .....	89
3.2.5	<u>3章結言</u> .....	89
	<u>第3章参考文献</u> .....	91

## 第3章 円柱試験片による測定・熱解析方法

### 3.1 熱処理用冷却剤の熱伝達率の同定

#### 3.1.1 概要

JISK2242 熱処理抽（冷却性能試験方法）に規定される銀試験片を用いて、一連の測定・計測である試験片の加熱－冷却剤への試験片投入－冷却過程の試験片温度変化（＝冷却曲線）測定データ格納を著者らが開発した自動化装置によって行った。一方、試験片の冷却過程を記述する熱伝導方程式の解析解を用い、冷却曲線から逆問題的に熱伝達率を同定するプログラムを開発した。上述の冷却曲線データを本プログラムに導入し得られる温度依存熱伝達率（熱伝達率曲線）を有限要素シミュレーションプログラムの境界条件として用い、熱処理シミュレーション計算を行った。その結果計算された冷却曲線は、測定値に一致し、計算プロセスの妥当性が確認された。また、種々の冷却剤や日本刀水焼入れ時に用いる焼刃土について、熱伝達率曲線を求めた。その冷却能を定量的に冊らかにした<sup>[1]</sup>。

#### 3.1.2 はじめに

熱処理条件や、それに適する熱処理用冷却剤を選定するには、多くの専門知識と経験が必要であるが、コンピュータを用いたシミュレーションによって比較的簡単に適切な損拌速度や油種の選定が可能となる。また設計者や専門家には、より精度の高い設定が可能な手段として、熱処理シミュレーションへの期待は大きいと考えられる。

一般に鋼を焼入れによって硬化させる際の焼入性の支配因子としては、①冷却剤の冷却能、②鋼材の大きさや形状、③鋼の相変態特性の3種が重要であるといわれている<sup>第1章[3]</sup>。そして現在、鋼材の組織変化、温度分布、応力ひずみ状態の連成関係を考慮した<sup>[2,3]</sup>CAE熱処理シミュレーションシステム（HEARTS）が開発され<sup>第2章[2-5], [4-7]</sup>、実用段階に入っている。

このようなシミュレーションシステムにおいては、上述①～③のデータをプリプロセッサ

を通じて入力する。特に①の冷却剤の冷却能については、金属表面における金属内部のから冷却剤への熱伝達特性データを入力する必要がある。

一方、JISK2242 熱処理油（冷却性能試験方法）<sup>第2章<sup>[9]</sup></sup>で規定される銀試験片を用い、加熱された銀試験片が冷却剤によって冷却されるとき試験片表面の温度を測定すると、多くの場合その冷却剤に固有の膜沸騰、核沸騰、および対流熱伝達によって冷却される過程を示す冷却曲線を得ることができる。このような冷却曲線の示す温度変化は、冷却剤の冷却能をとらえるものとして実用上広く利用されている。しかし、温度変化は、試験片の形状や物性に依存する。したがって様々な異なる材料や形状を設定して行うシミュレーション計算への入力データとして、そのまま適用することができない。そこで本章では、冷却能を固有の試験片の温度変化としてではなく、表面における熱移動（熱流れ）の状態を表す値、すなわち熱伝達率としてとらえることを試みた。温度測定結果として上述の冷却曲線を用い、これから熱流れの状態を求める計算は、冷却過程を記述する熱伝導方程式の解析解を用いて行った。すなわち熱伝達率  $h$  は、熱伝導方程式のベッセル解析解を用いて、冷却曲線から回帰分析などを利用して逆題的に同定する方法によって求めた。一連の計算は、パソコンによって行うプログラムを開発し、これによって行った。その結果、冷却曲線の各温度に対応し、材料や形状に依存しない熱伝達率曲線  $h(T)$  が算出された。その  $h(T)$  を有限要素熱処理シミュレーションシステム（HEARTS）<sup>第2章<sup>[2-5], [4-7]</sup></sup>のプリプロセッサに入力し、シミュレーションを行った。計算結果は測定値に一致し、開発した一連の方法が検証された。また種々の冷却剤や日本刀の焼入れに用いる焼刃土について、その伝達率曲線を求め、冷却特性を定量的に明らかにした。



### 3.1.3 熱伝達率同定の方法

#### 3.1.3.1 冷却曲線の測定

純銀製で直径 10mm, 長さ 30mm の Fig. 3.1 右上に示す, 形状の円柱試験片を赤外線ヒータで試験片各部を均一に約 830°C に加熱し, 温度  $T_{\infty}$  の試料冷却剤中で冷却する. その表面温度  $T_m$  と経過時間  $t$  の関係を JISK2242 第2章<sup>[9], [8]</sup>に基づいて, 銀-アルメル熱電対によって測定し, 冷却曲線を求める. 一連の操作は, 著者らが開発した Fig. 3.1 左に示す自動測定装置によって行った. まず装置に取りつけた Fig. 3.1 右上に示す銀試験片を 830°C に加熱し, それが変動幅  $\pm 5^{\circ}\text{C}$  以下に安定するのを確認後, 2m/s の速度で試料油剤中に投入する. 表面温度  $T_m$  は 800°C になった時点から 0.01s に 1 回のサンプリングスケジュールで測定し, 冷却曲線を求める. また, 日本刀の水焼入れに用いる焼刃土を本銀試験片に塗布し同様の冷却曲線を得ることによって, その効果を測定した.

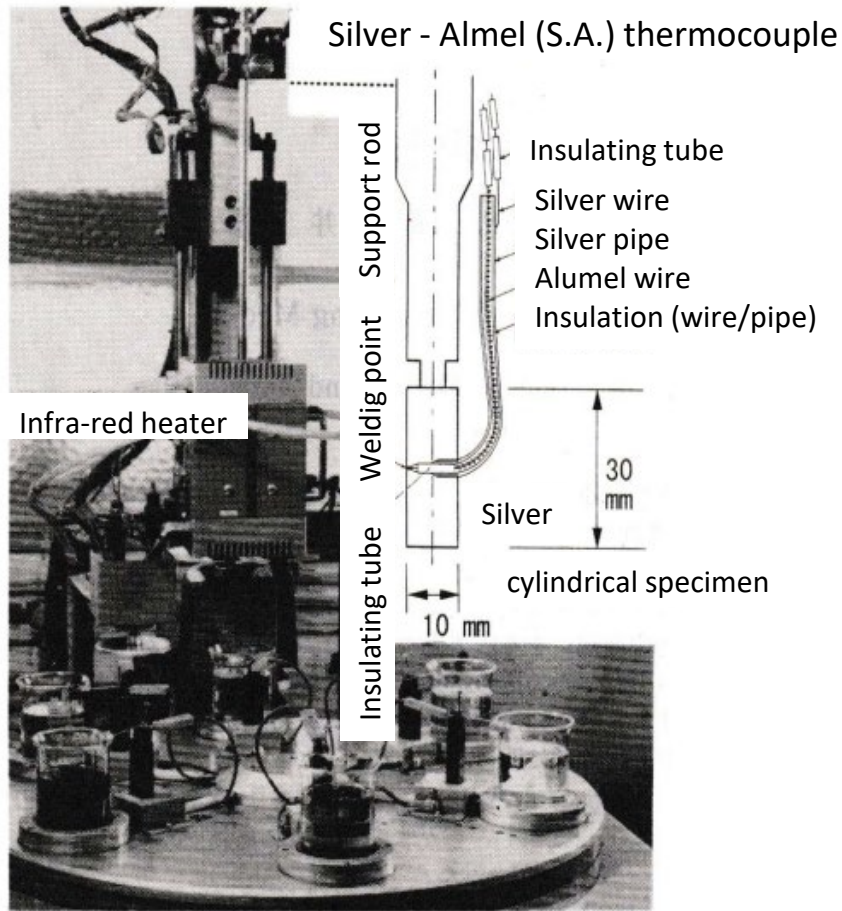


Fig. 3.1 The shape and structure of the cylindrical silver specimen was shown on right side and the photograph of the automatic cooling curve measuring device was shown on left side.<sup>6</sup>

### 3.1.3.2 冷却剤

冷却剤としては Table 3.1 に示す性状の市販コールドクエンチ油を油温  $T_{\infty} = 80^{\circ}\text{C}$  で、マルテンパー処理も可能なホットクエンチ油、タイプ A と B を  $T_{\infty} = 200^{\circ}\text{C}$  でまた水焼入れの冷却剤には  $T_{\infty} = 40^{\circ}\text{C}$  の水道水をそれぞれ冷却曲線を求めるために用いた。

<sup>6</sup> 金森英夫, 中村英一, 内田均, 小山三郎, 井上達雄, 熱処理, 第 36 巻第 6 号(1996)

Table 3.1 Properties of test coolant oils<sup>6</sup>

	Cold quenching oil	Martempering oils	
		Type A	Type B
Density at 15°C, $\rho / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	872	870	877
Kinematic viscosity at 40°C, $\nu / \text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ at 100°C, $\nu / \text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	18	180	183
	3.7	19	18

### 3.1.4 熱伝導方程式

#### 3.1.4.1 熱流束ベクトル (Heat flux vector)

均質で等方性の物質（すなわち、熱伝導率が方向に依存しない材料）の場合、フーリエの法則は次の形式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$\vec{q}(\vec{r}, t) = -k \nabla T(\vec{r}, t) \quad (3-1)$$

units(SI)

$\vec{q}(\vec{r}, t)$ : heat flux vector :  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$

$T(\vec{r}, t)$ : Temperature distribution : °C

$\nabla T$ : Temperature gradient : °C · m<sup>-1</sup>

$k$ : Thermal conductivity :  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$

$t$ : time : s

ここで、温度勾配 (gradient)  $\nabla T(\vec{r}, t)$  は (微小単位) 等温面に対して垂直なベクトルで、これと熱伝導度との積で表される熱流束ベクトル Heat flux vector  $\vec{q}(\vec{r}, t)$  は温度が低下する

向きの単位面積，単位時間あたりの熱流を意味し，そして  $k$  は物質の熱伝導度 Thermal conductivity と呼ばれ，正のスカラー量である<sup>[9,10]</sup>。

直交座標で式 (2-1) は次のように書かれる。

$$\vec{q}(x, y, z, t) = -\vec{i}k \frac{\partial T}{\partial x} - \vec{j}k \frac{\partial T}{\partial y} - \vec{k}k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3-2)$$

ここで  $\vec{i}$ ， $\vec{j}$ ，と  $\vec{k}$  は  $x$ ， $y$ ， $z$  方向のそれぞれに対する単位ベクトルである。そこで  $x$ ， $y$ ， $z$  方向の3成分それぞれは式 (3-3) によって表される。温度勾配に対する熱流束の大きさは物質の熱伝導率  $k$  に直接比例することが明らかである。

$$q_x = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\alpha \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3-3)$$

### 3.1.4.2 熱伝導方程式 (The differential equation of heat conduction)

熱平衡状態にあって均質，等方性で系内に熱の発生のない固体内に対する熱伝導方程式を導くため，Fig. 3.2 に示すような微小体積に対するエネルギーバランスを考慮すると，その状態は次のように，示される。

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Rate of heat entering through} \\ \text{the bounding surfaces of } V \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Rate of storage} \\ \text{of energy in } V \end{array} \right] \quad (3-4)$$

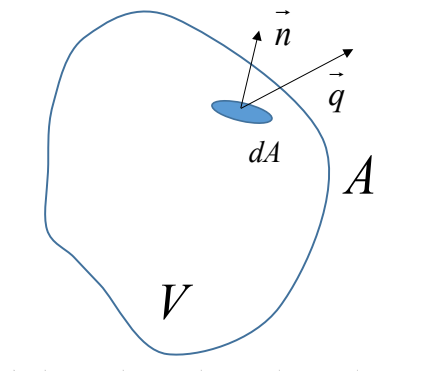


Fig. 3.2 Infinitesimal area,  $dA$  and heat flux vector  $\vec{q}$  in small control volume  $V$ .

熱エネルギーについては次のようになる。

$$\left( \begin{array}{l} \text{Rate of heat entering through} \\ \text{the bounding surfaces of } V \end{array} \right) = -\int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA = -\int_V \nabla \cdot \vec{q} dv \quad (3-5)$$

ここで、 $A$ は体積要素の表面積、 $\vec{n}$ は面要素 $dA$ に直角で外に向いた単位ベクトル、ここでは負の方向を示す Heat flux vector  $\vec{q}(\vec{r}, t)$ が実際の状況を示している。

面積積分を体積積分に変換するダイバージェンス則が式(3-5)に適用され蓄積されるエネルギーは次式で示される。

$$\left( \begin{array}{l} \text{Rate of storage} \\ \text{of energy in } V \end{array} \right) = \int_V \rho C_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} dv \quad (3-6)$$

したがって、(3-4)、(3-5)、(3-6)から

$$-\int_V \nabla \vec{q}(\vec{r}, t) dv - \int_V \rho C_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} dv = 0 \quad (3-7)$$

$$\therefore \int_V \left[ -\nabla \vec{q}(\vec{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] dv = 0 \quad (3-8)$$

方程式(3-8)は固体内の非常に小さい体積要素 $V$ の場合には積分記号を外し

$$\therefore -\nabla \vec{q}(\vec{r}, T) - \rho C_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (3-9)$$

式(3-1) Fourierの法則と式(3-9)から次のように書ける

$$\nabla^2 kT(\vec{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (3-10)$$

### 3.1.4.3 円柱座標への変換

直交座標 $(x, y)$ から円柱座標 $(\varphi, r)$ に変換するために

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z \quad (3-11)$$

を偏微分すると

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos(\varphi) \quad (3-12)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3-14)$$

式 (3-13) に  $r \cos(\varphi)$  を, 式 (3-14) には  $\sin(\varphi)$  を, それぞれ乗じて

$$r \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} = r \cos^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos(\varphi) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3-15)$$

$$\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3-16)$$

式 (3-15) と (3-16) の差をとり演算子  $\frac{\partial}{\partial x}$  を求めると,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3-17)$$

同様に, 式 (3-13) に  $r \sin(\varphi)$  を, 式 (3-14) には  $\cos(\varphi)$  を, それぞれ乗じて

$$r \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} = r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r \sin^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3-18)$$

$$\cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3-19)$$

式 (3-18) と (3-19) の和をとり演算子  $\frac{\partial}{\partial y}$  を求めると,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3-20)$$

二次元ラプラシアンは 
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

式 (3-17) から

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left\{ \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \left\{ \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \\ &+ \left\{ \frac{\sin^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} \right\} + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \\ &+ \left\{ \frac{\sin^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} \right\} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

また、式 (3-20) から

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left\{ \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \left\{ \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} \\ &- \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ &+ \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \left\{ \frac{\sin^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} \right\} \\ &+ \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} \\ &+ \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3-21)\end{aligned}$$

いま、直径 10mm、長さ 30mm の円柱で端面からの冷却を無視することが出来ると考え無

限円柱モデルを仮定する<sup>[7]</sup>。そこで、半径  $a = 5 \text{ mm}$  の円柱側面から、温度  $T_\infty$  の試料冷却剤

に冷却されたとする一次元熱伝導方程式は、温度拡散率 (Thermal diffusivity) を  $k$  とし、

式 (3-10) は

$$\nabla^2 kT(\vec{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

(3-21) を用いると

$\varphi = 0$  であるから

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad \kappa = \frac{k}{\rho c}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad t \geq 0 \quad (3-22)$$

によって示される。ここで、 $k$  は熱伝導率、 $\rho$  は密度、 $c$  は比熱、 $\kappa$  は熱拡散率である。

冷却剤の種類と温度に依存する熱伝達率を求めるにあたり、式 (3-22) の解析解を求めるための条件を次のように設定した。

まず方程式 (3-22) の解を時間間隔  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$  ごとに求めるため、 $\tau_i \equiv t_i - t_{i-1}$  とおき、

$\tau_i$  における初期条件を、

$$T(r, \tau_{i-1}) = f(r) \quad (3-23)$$

と表す。また円柱表面  $a$  における冷却剤の熱伝達率を  $h$  とすると、円柱の半径方向に対する境界条件は、

$$\frac{\partial T(a, \tau_i)}{\partial r} = -H [T(a, \tau_i) - T_\infty] \quad (3-24)$$

ここで  $H \equiv \frac{h}{k}$

と表される。 $h$  は温度  $T$ 、 $T_\infty$  の関数であり、 $T_\infty$  は冷却剤の温度である。

#### 3.1.4.4 変数分離

式 (3-22)、(3-23)、(3-24) を解くために時間  $t, \tau_i$  と位置  $r$  の関数である  $T(r, t)$  を

$$T(r, t) \equiv R(r)\zeta(t) \quad (3-25)$$



のように変数分離すると式 (3-22) は

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial R(r)}{\partial r} \zeta(t) \quad (3-26)$$

$$\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} \zeta(t) \quad (3-27)$$

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} R(r) \quad (3-28)$$

であるから

$$\frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} R(r) = \kappa \zeta(t) \left[ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right]$$

$r$  と  $t$  の関係を整理すると

$$\frac{1}{\kappa \zeta(t)} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} = \frac{1}{R(r)} \left[ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right]$$

となり,

$$\frac{1}{\kappa \zeta(t)} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} = \frac{1}{R(r)} \left[ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right] \equiv -\mu^2 \quad (3-29)$$

とおくことができる。

式 (3-29) から 2 個の常微分方程式

$$\frac{\partial \zeta(t)}{\partial t} + \kappa \zeta(t) \mu^2 = 0 \quad (3-30)$$

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \mu^2 R(r) = 0 \quad (3-31)$$

が成り立つ。

ところで式 (3-30) の一般解は

$$\zeta(t) = C_R \cdot e^{-\kappa \mu^2 t} \quad (3-32)$$

ここで、式 (3-32) の右辺肩を負としたのは減衰する物理的事実に合致するためである。

これを微分し

$$\frac{\zeta(t)}{\partial t} = -C_R \kappa \mu^2 e^{-\kappa \mu^2 t} = -\zeta(t) \kappa \mu^2$$

となり、式(3-32)は式(3-30)の一般解であることを確認できる。

一方、微分方程式(3-31)解としては

$$J_0(r) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(p+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p} = 1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!} \left(\frac{r}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!3!} \left(\frac{r}{2}\right)^6 + \dots \quad (3-33)$$

$$J_0(r) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(p+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p} = 1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!} \left(\frac{r}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!3!} \left(\frac{r}{2}\right)^6 + \dots + \frac{(-1)^p}{p! p!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p} \dots$$

$$J_1(r) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(1+p+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p+1} = \left(\frac{r}{2}\right) - \frac{1}{2!} \left(\frac{r}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!(3!)} \left(\frac{r}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{r}{2}\right)^7 + \dots - \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!(p)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p-1} + \frac{(-1)^p}{p!(p+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p+1}$$

$$\dot{J}_0(r) = -\frac{2}{2} \left(\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{2!2!} \frac{4}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^3 - \frac{1}{3!3!} \frac{6}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^5 + \dots + \frac{(-1)^p}{p! p!} \frac{2p}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p-1} \dots$$

$$\dot{J}_1(r) = -\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{(2-1)!2!} \left(\frac{r}{2}\right)^3 - \frac{1}{(3-1)!3!} \left(\frac{r}{2}\right)^5 + \dots + \frac{(-1)^p}{(p-1)!p!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2p-1} \dots$$

$$\therefore \dot{J}_0(r) = -\dot{J}_1(r) \quad (3-34)$$

と表される。

式(3-33)と(3-32)を式(3-25)に代入すれば(3-22)の一般解は、任意定数をまとめて

$$T = C e^{-\kappa \mu^2 t} J_0(\mu r) + T_{\infty} \quad (3-35)$$

で与えられる。

境界条件(3-23)は

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -H(T - T_{\infty})$$

であるから

$$\frac{\partial T}{\partial r} = C e^{-\kappa \mu^2 t} \frac{dJ_0(\mu r)}{dr} \quad (3-36)$$

$$C e^{-\kappa \mu^2 t} \frac{dJ_0(\mu r)}{dr} = -H(T - T_\infty) \quad (3-37)$$

$$C e^{-\kappa \mu^2 t} \frac{dJ_0(\mu r)}{dr} + H(T - T_\infty) = 0$$

$$C e^{-\kappa \mu^2 t} \frac{dJ_0(\mu r)}{dr} + H \{ C e^{-\kappa \mu^2 t} J_0(\mu r) + T_\infty - T_\infty \} = 0$$

$$C e^{-\kappa \mu^2 t} \frac{dJ_0(\mu r)}{dr} + H C e^{-\kappa \mu^2 t} J_0(\mu r) = 0$$

$$C e^{-\kappa \mu^2 t} \left\{ \frac{dJ_0(\mu r)}{dr} + H J_0(\mu r) \right\} = 0$$

$$\therefore \frac{dJ_0(\mu r)}{dr} + H J_0(\mu r) = 0$$

式 (3-34) より,

$$\therefore H J_0(\mu r) - J_1(\mu r) = 0 \quad (3-38)$$

熱伝達率  $h$  は式 (3-38) と関係づけられている.

$$\text{ここで } H = \frac{h}{k}$$

式 (3-35) の形の関数は全て式 (3-22) の解であるから, それらの和

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} C \exp(-\kappa \mu_m^2 t) J_0(\mu_m r) \quad (3-39)$$

もまた (3-22) の解になる.

ここで

$$\int_0^a r J_0(\mu_n r) J_0(\mu_m r) dr = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_0^a r \{ J_0(\mu_n r) \}^2 dr = \frac{a^2}{2\mu_n^2} (H^2 + \mu_n^2) \{ J_0(\mu_n a) \}^2, \quad n = m \quad (3-40)$$

その場合の直交条件を利用して係数  $C$  を求める<sup>[9-11]</sup>.

式 (3-39) に  $rJ_0(\mu_n r)$  を乗じて積分すると

$$C_n = \frac{2}{a^2} \frac{\mu_n^2}{(H^2 + \mu_n^2)} \frac{\int_0^a r f(r) J_0(\mu_n r) dr}{\{J_0(\mu_n a)\}^2} \quad (3-41)$$

ここで

$$\lambda_n \equiv a\mu_n \quad (3-42)$$

各時間隔  $\tau_i$  に、熱伝達率  $h$  を含む境界条件式 (3-24) と温度分布  $f(r)$  を初期条件

(3-23) として設定するとき、式 (3-22) の解は次のように表される<sup>[1]</sup>

$$T(r, \tau_i) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_1 \lambda_n^2}{R_2} \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{a^2} \lambda_n^2 \tau_i\right) \right] \quad (3-43)$$

ただし、

$$R_1 = J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) \int_0^a f(\xi) J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} \xi\right) \xi d\xi \quad (3-44)$$

$$R_2 = (h^2 a^2 + \lambda_n^2) [J_0(\lambda_n)]^2 \quad (3-45)$$

ここで  $J_\nu(x)$  は  $\nu$  次のベッセル関数

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+\nu)!} \left(\frac{X}{2}\right)^{\nu+2p} \quad (3-46)$$

で、式 (3-43), (3-44), (3-45) 中の  $\lambda_n$  は境界条件式 (3-24) によって次のように (熱伝達率  $h$  と) 関係づけられる。

$$\frac{ha}{\alpha} = \lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} \quad (3-47)$$

このような手続きを経て式 (3-47) によってある温度領域の適切な熱伝達率が同定され、

式 (3-43) に代入できるとき、算出される温度分布は、次のタイムステップの初期条件

(3-23) として採用され、計算を続けることができる。このようにして冷却過程のすべての温度に対応する熱伝達率の同定が行われ、熱伝達率曲線が求まる。

#### 3.1.4.5 熱伝達率の同定

冷却過程のそれぞれの温度に対応する熱伝達率曲線、 $h(T)$  を Fig. 3.3 に示す次の手順によって求めた。

まず、時間間隔  $\tau_i (= t_i - t_{i-1})$  は、表面温度が  $3^\circ\text{C}$  で冷却されるごとに設定していく。それぞれの時間間隔ごとに次の①-⑤の手順で  $h$  を同定する。なお、円柱表面の温度測定値  $T_m$  と、 $h(T)$  から計算される表面の温度計算値  $T_x$  の差が、許容値  $\delta$  (=今回は、 $0.2^\circ\text{C}$  に設定) より大きい場合には、 $\delta$  の値以下になるまで  $h_c$  の微修正を繰り返すプログラムを付加し、測定値に十分近い値を得るようにした。

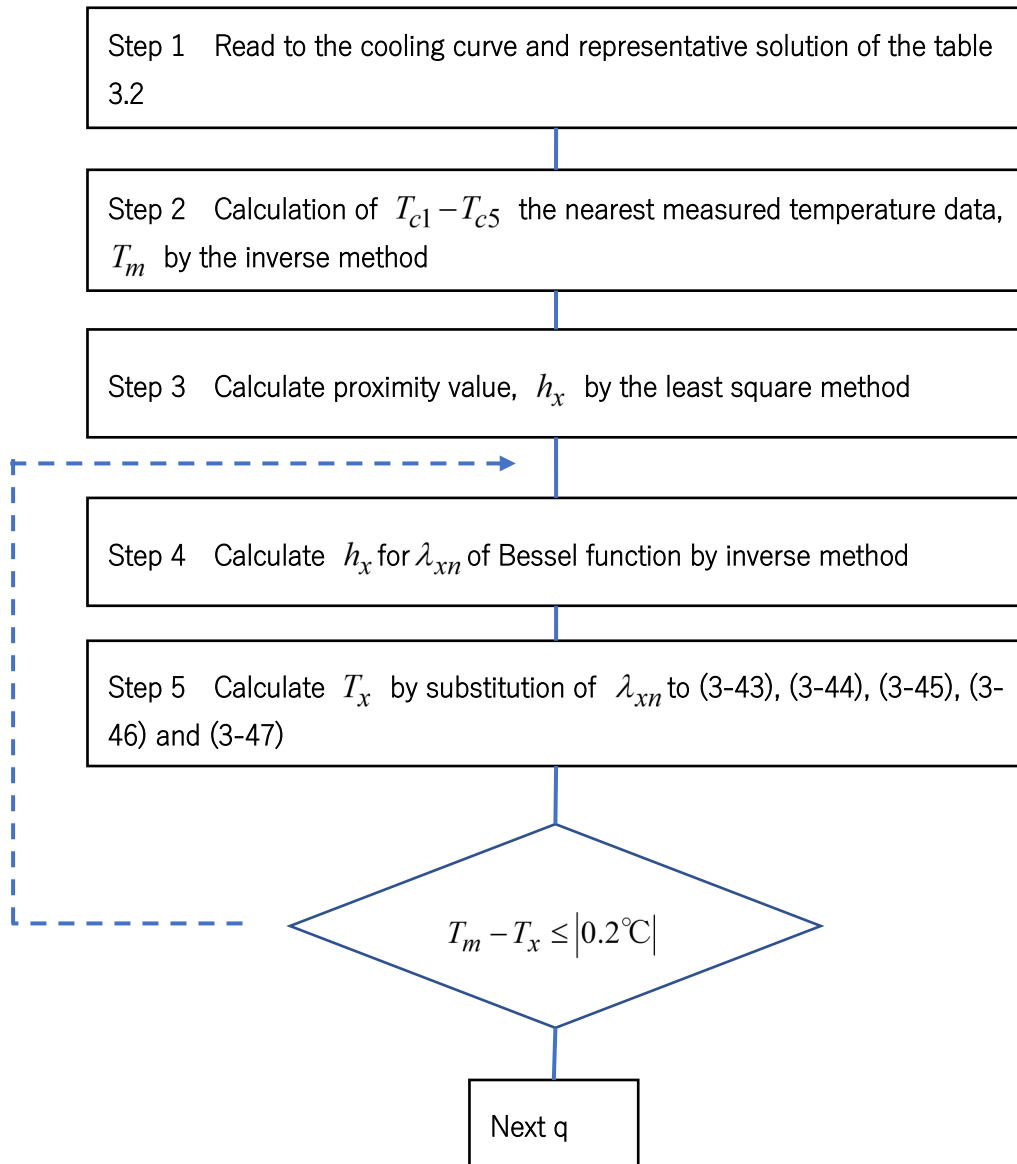


Fig. 3.3 The procedure of identification of the heat transfer coefficient depending on temperature  $h(T)$  from cooling curve data.

① まず代入すべき  $h \cdot ak$  を小さい順に、0.001 から 2.01 まで 200 個並べ、それぞれの  $h \cdot ak$  に対応する  $\lambda_n$  を式 (3-46) によって逆問題的に 5 個 ( $n=5$ ) まで求める。そして  $(h/ak, \lambda_n)$  を 200 行並べた関数表 (Table 3.2 にその一部を示す) を作成する。プログラムの Step-1 では、その関数表の内容を読み込む。

② プログラムの Step-2 では、関数表の第一行目から順に式 (3-43) , (3-44) , (3-45) に代入し、それぞれの行に対応する  $T_c$  を求めていく。表面温度測定値  $T_m$  に最も近い表面温度計算値  $T_{c3}(a, \tau_i)$  を求める。そしてその前後それぞれ 2 組を合わせ、合計 5 組の  $T_{c1}(a, \tau_i)$  ,  $T_{c2}(a, \tau_i)$  ,  $\dots$  ,  $T_{c5}(a, \tau_i)$  とそれに対応する  $h(T)$  をそれぞれ逆問題で求める。

Table 3.2 Bessel function table : Example of  $h/ak$  and  $\lambda_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots, 5$ ) .<sup>6</sup>

$ha/k$		$\lambda_1,$	$\lambda_2,$	$\dots\dots\dots,$	$\lambda_5,$
1	0.001	0.0447,	3.8319,	$\dots\dots\dots,$	13.3239
2	0.005	0.0999,	3.8330,	$\dots\dots\dots,$	13.3240
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
200	2.010	1.6018	4.2928	$\dots\dots\dots,$	13.4725

(逆問題手法によって式 (3-43) , (3-44)  $\dots$  (3-47) から代表解 ( $ha/k, \lambda_n$ ) を作成)

③ Step-3 では上述②の 5 組の  $T_{c1}(a, \tau_i)$  ,  $T_{c2}(a, \tau_i)$  ,  $\dots$  ,  $T_{c5}(a, \tau_i)$  から、 $h = h(T)$  の関係の回帰式を求める。この回帰式に表面温度測定値  $T_m$  を代入し、 $T_m$  に対応する回帰熱伝達率  $h_x$  を回帰的に算出する。

④ Step-4 では、①の関数表 (Table 3.2) を作成するのと同様の方法で  $h_x$  を与える  $\lambda_{xn}$  ( $n=1, 2, \dots, 5$ ) を逆問題的に求める。

⑤ Step-5 で  $h_x$  ,  $\lambda_{xn}$  : を式 (3-43) に代入して求まる表面温度計算値  $T_x(a, \tau_i)$  と表面温度測定値  $T_m$  の差が許容値  $\delta$  より小さくなるまで  $h_x$  の微修正を行う。  $\delta$  に比べて小さい値であれば、そのときの  $h(T)$  を求める値とする。

### 3.1.4.6 熱伝達率同定の数値計算について

表面温度測定値  $T_m$  に対し,  $\pm 0.2 (= \delta)$  °C以下の誤差で  $h(T)$  を決定した. なお, ③の回帰式は  $y = ax^b$  を用いたが, 回帰式に対する相関係数  $R^2$  はほとんどの場合 0.9999 以上となった. その結果  $T_m - T_x$  は 0.05°C以下の値を示したため, ⑤の微修正はほとんど行わずに終了している.

また, 式 (3-44) 中の積分は 10 分割の台形数値積分を, また, 式 (3-46) の総和  $\Sigma$  は, 収束する  $n=1, 2, \dots, 20$  までの計算を行っている.

## 3.1.5 測定結果

### 3.1.5.1 冷却曲線

Fig. 3.4 に試料冷却剤の冷却曲線測定結果を示す. それぞれの試料冷却剤とも, 3段階の冷却過程が明確に観察される. すなわち, 第1段階は, 試験片表面が冷却油剤の蒸気膜で覆われる比較的ゆっくりした冷却速度の膜沸騰段階, 第2の核沸騰に起因する冷却速度の大きい段階を経て第3の対流段階に至るものである. 冷却曲線の形状は, 実際に冷却剤が使用される目的に応じて異なっている. これに対し, 同じ銀試験片表面に日本刀の焼入れに用いる焼刃土 (主として粘土, 木炭粉, 砥石粉などの混合体) を種々の厚さに塗り, 水冷却を行った結果を Fig. 5 に示す. 太線で示す焼刃土が厚く塗られた場合, および太破線で示す全く塗られない ( $d=0$ ) 場合には, 通常のコoling剤に類似の冷却曲線を示す. しかし, 焼刃土が  $d=0.1\text{--}0.3\text{mm}$  と薄く塗られた場合には, これらとは明らかに異なる冷却曲線が観察された. この特異な冷却現象<sup>[12-17]</sup>は, 何百年も前に刀鍛冶の培った経験的な日本刀の焼入れ手法からも見いだされていたものと考えられる<sup>[18]-[23]</sup>.



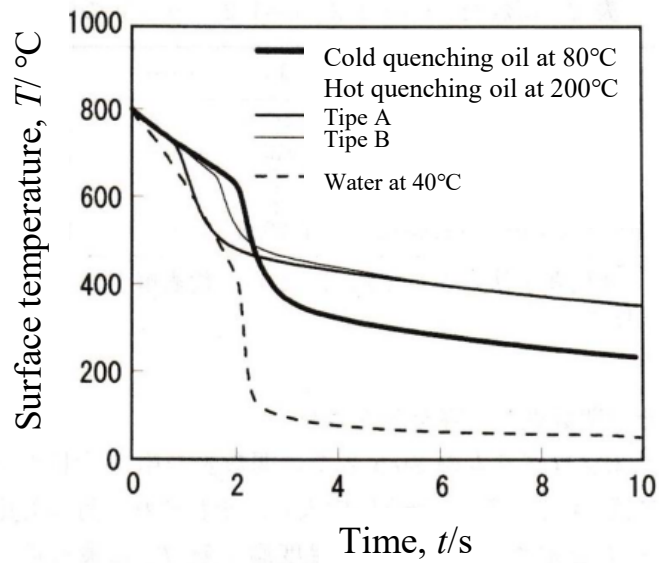


Fig. 3.4 Cooling curves of silver cylindrical test specimen during quenching into various coolants.<sup>6</sup>

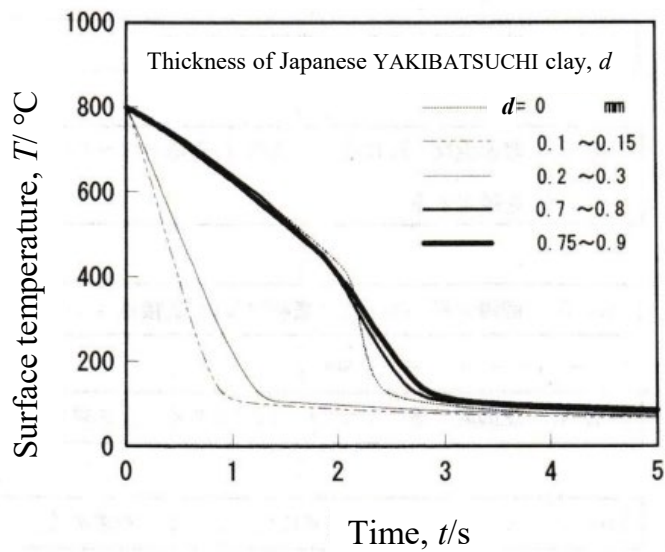


Fig. 3.5 The effect of applying various thicknesses of Japanese YAKIBATSUCHI clay on the surface of silver cylindrical specimens was investigated by measuring the cooling curve when the specimens were quenched from  $800^\circ\text{C}$  to  $40^\circ\text{C}$  in tap water.<sup>6</sup>

次に、これらの冷却曲線を参照して求めた熱伝達率同定結果を Fig. 3.6 と Fig. 3.7 に示す。

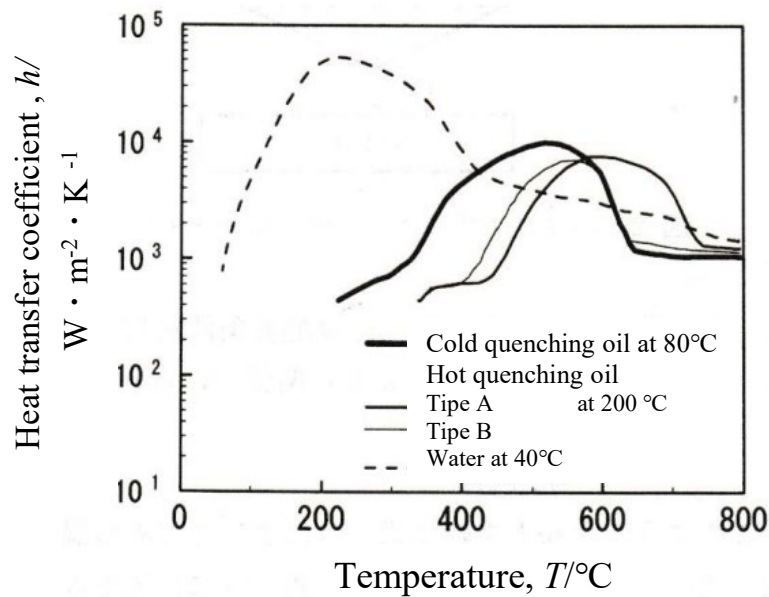


Fig. 3.6 Relationship of heat transfer coefficient,  $h$  and surface temperature,  $T$ .<sup>6</sup>

### 3.1.5.2 コールドクエンチ油の熱伝達率

コールドクエンチ油では Fig. 3.6 から、800–600 $^{\circ}C$ における膜沸騰の段階の熱伝達率  $h$  は約 1 000  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$  であることがわかる。600–400 $^{\circ}C$ の核沸騰段階の  $h$  は 5000～10000  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$  に達する。 $h$ の値はその後温度の低下に伴って減少し、300 $^{\circ}C$ で付近の対流段階では、800  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ 以下の小さい値となる。コールドクエンチ油による焼入れでは、処理物は水焼入れに比較し、十分遅い速度で焼入れされるため、焼割れが防止される。これはマルテンサイト変態領域における熱伝達率  $h$  が水に比べ十分小さいコールドクエンチ油で冷却されるためである。

### 3.1.5.3 マルクエンチの効果

一方、マルクエンチ可能なホットクエンチ油については、Fig. 3.6 中に中太線と細線で示す。マルクエンチ用ホット油は、コールドクエンチ油 に比較し、約 100 $^{\circ}C$ 高い 400 $^{\circ}C$ 付近から  $h$ の小さい対流段階が始まることによって、焼入材各部の温度をより均一にしてから、マルテンサイト変態を起こす特性をもっている。このようなホット油を使用することによっ

て、変態が処理物各部で均一に行われ、焼入れひずみが抑制される。このように熱処理油の冷却能の違いは焼入れに大きな影響を及ぼすため、目的の処理方法に適した冷却剤の選定が重要であるといえる。Fig. 3.6 中の破線は、冷却剤である水が Ms 点附近において、同コールドクエンチ油の約 10 倍に及ぶ  $h$  の値のピークをもつ冷却特性を有し、大きな焼入れ能力をもつことを示している。しかし、 $800-400^{\circ}\text{C}$  では上述 3.2 のコールドクエンチ油よりも  $h$  が小さい領域があり、 $A_1$  変態を阻止しにくい特性をもあわせもち、焼入れを制御しにくい冷却特性であることがわかる。日本刀の焼入れに使用する焼刃土における表面状態の変化<sup>[12]</sup>や熱伝導度の低い物質を塗布する（コーティング<sup>[12-17]</sup>）効果を Fig. 3.7 に示す。焼刃土を塗ると、 $A_1$  変態を起こしやすい膜沸騰段階は消失する。また、焼刃土厚さ  $d$  を大きくすると、それに伴い  $h$  は減少する。また薄く ( $0.3 \leq d \leq 0.1 \text{ mm}$ ) 塗った場合、 $400^{\circ}\text{C}$  以上の高い温度領域で、 $h$  が焼刃土を塗っていないものより大きい値を示した。このように焼刃土の厚さによって焼入れ性や焼き割れを防止する特性が変わる。刀鍛冶が焼刃土を塗り、その厚さを変えることによって日本刀の水焼入れを制御していたことがわかる<sup>[18-23]</sup>。

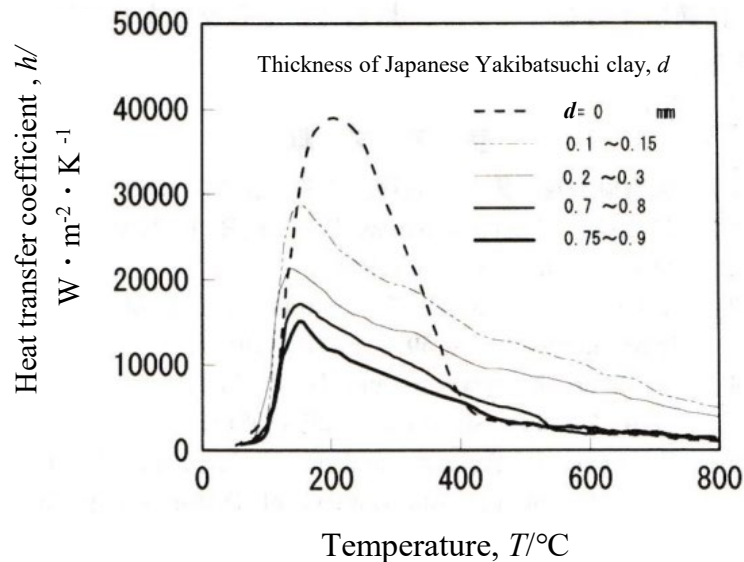


Fig. 3.7 Effect of applying Japanese YAKIBATSUVHI clay on the surface of the silver cylindrical test specimen to the heat transfer coefficient. <sup>6</sup>

### 3.1.6 同定値の検証

このように、実際の冷却剤について同定した熱伝達率、 $h(T)$ を市販熱処理シミュレーションシステム（HEARTS）<sup>[2]-[10]</sup>に導入し、次の3種の計算を行い、 $h(T)$ 算出プロセスの妥当性を検証した。まず第1に、相変態のない場合として、銀試験片を冷却するシミュレーション結果と冷却曲線測定結果を比較した。この場合、 $h(T)$ 算出システム同様、冷却モデル形状は直径10 mmの無限長円柱とした。第2は、オーステナイトからパーライトとマルテンサイトに変態を起こす特性の炭素鋼が、マルクエンチ可能なホット油によって冷却される場合である。この場合冷却モデルは、直径10mmの無限長円柱とし、シミュレーション計算結果と測定結果を比較する。第3に、直径10 mm、長さ30 mmの円柱で、その側面と両端面から冷却される2次元モデルによって、冷却曲線を計算する。無限長円柱モデルによって計算した結果と比較し、 $h(T)$ 算出に、無限長円柱モデルを適用することの妥当性を検証する。

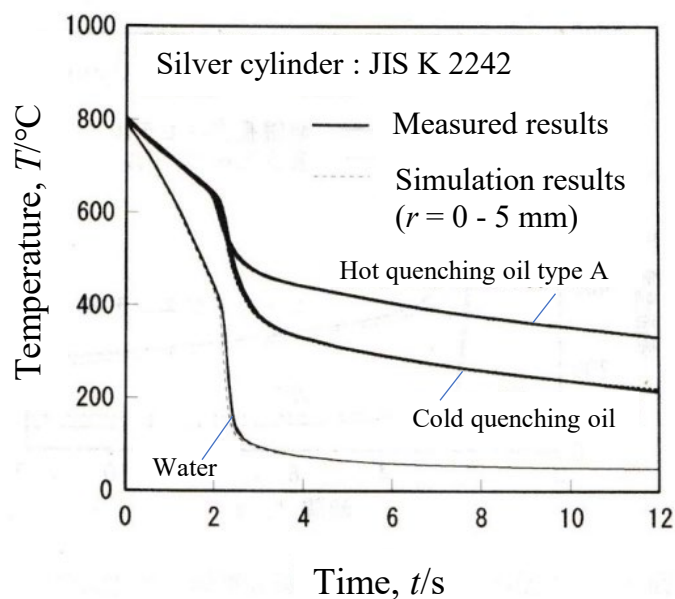


Fig. 3.8 Comparison of calculated and measured cooling curves of cylindrical silver specimen during quenching from 800 °C into various coolants.<sup>6</sup>

Fig. 3.8 に、第1の無限長円柱モデルの結果を示す。コールドクエンチ油、マルクエンチ油タイプ A と水の全試料冷却剤において、 $r = 5 \text{ mm}$  における表面温度計算結果と測定結果がほぼ完全に一致した。したがって、熱伝達率の同定結果の妥当性を確認するとともに、有限要素シミュレーションシステム (HEARTS) [4]-[7]の熱伝導解析の正確さも合わせて確認することができた。また、計算値には  $r=0$  から  $r=5 \text{ mm}$  に至る部分の温度分布が重なってしまい、図中には表れていない。特に、 $r=5 \sim r=4 \text{ mm}$  の表面近傍  $1 \text{ mm}$  において、温度変化の最も大きい2秒後に温度差が  $10 \text{ deg}$  以上であった。このように表面近傍における温度分布が小さいという結果は、銀の大きな熱伝導率のためと考えられる。

同様に S45C 鋼についての結果を Fig. 3.9 に示す。円柱中央部の計算結果には、変態潜熱の発生に起因する温度上昇が  $600^\circ\text{C}$  でのやや低温側に表れ、測定値とよい一致が見られた。なお、炭素鋼の熱伝導率は銀などに比べ小さいため、中央部から表面にかけ大きな温度分布が計算された。

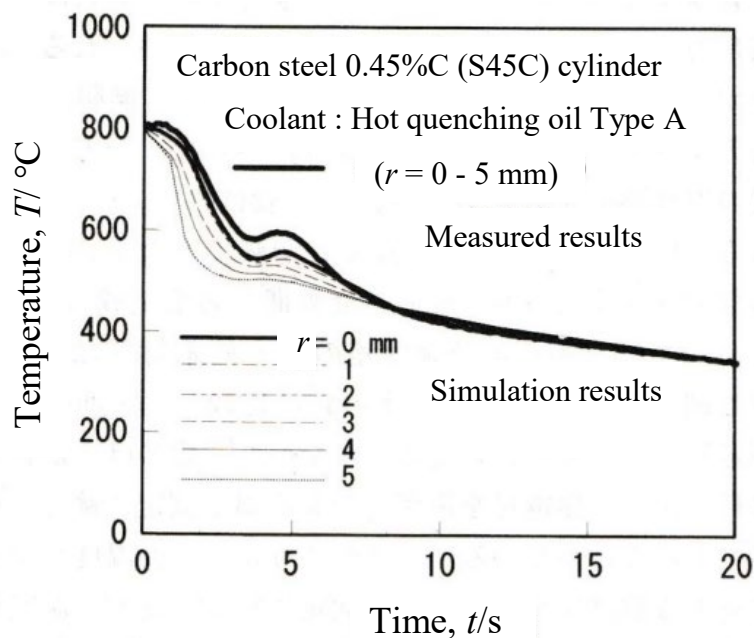


Fig. 3.9 Quenching simulation results of S45C carbon steel cylindrical parts and comparison with the temperature measured data at the center of the parts. <sup>6</sup>

第3の有限長円柱モデルで、側面だけでなく、上下の端面からも冷却される温度計算結果を Fig. 3.10 に示す。円柱側面中央の表面においては、無限長円柱モデルと銀試験片有限長円柱モデルの冷却曲線はよく一致した。熱伝導率が高い銀は、表面と内部の温度差が小さいため、直径 10 mm に対し長さ 30 mm の円柱端面からの冷却の影響は受けにくい<sup>[15-16]</sup>。

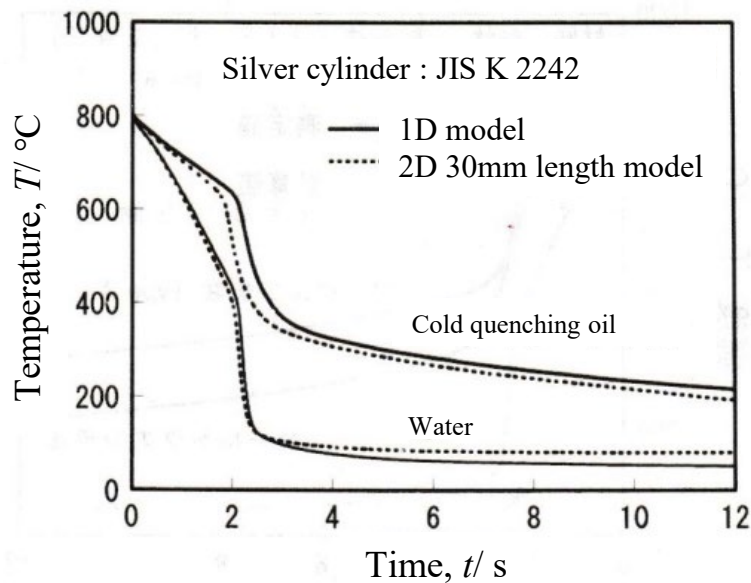


Fig. 3.10 Comparison with the simulation results of silver cylinder in one-dimensional model (1D) and simulation in a two-dimensional (2D) 30 mm length model. <sup>6</sup>

すなわち本サイズであれば、無限長円柱モデルが十分適用できるものと推察される。したがって円柱側面の  $h$  を求める場合、無限長円柱モデルを用いることの妥当性が検証された。一方、熱電対の温度感知部のプローブ径は一般に約 0.5~1 mm である。Fig. 3.8 中に示される最も温度変化の大きい冷却 1 秒後の、 $r=4$  と  $r=5$ mm の位置間（表面近傍 1mm）において約 100 deg の温度差のある鉄系材料は、Fig. 3.7 中で同温度差が 10deg 以下の銀に比較し、表面温度を測定しにくい材料といえる。すなわち、銀のほうが鉄系材料に比べ、熱電対を使用した表面温度測定に適した材料であることがわかる。以下のように、表面温度の測定

に適する銀試験片冷却曲線から同定される冷却剤の温度依存熱伝達率である熱伝達曲線  $h(T)$  は、鋼の熱処理シミュレーションに十分適用できることが確認された。

#### 3.1.7 銀円柱試験片への鉄めっきの影響

3.1.6 で述べたように、銀表面にアルメル線を溶接し冷却過程の温度変化を測定する JIS K 2242 A 法は、試験片全体が銀・アルメル表面近接型の熱電対を形成するため、表面温度を応答性良く正確に測定できる特性を有している。したがって蒸気膜段階（蒸気膜長さ）とそれが崩壊する特性温度（時間）、核沸騰における急冷の様子及び核沸騰から対流段階に至る遷移過程、特に対流段階開始温度とそれに続く緩冷却の対流段階における温度低下傾向について、それぞれに油剤ごとに異なる温度特性を明確に示すことができる。そのため冷却剤に固有の冷却特性を表すことのできる優れた試験方法として JIS 化され<sup>第2章[9]</sup>、広く利用されている。しかし蒸気膜が崩壊する特性温度は金属表面の形態に依存する特性<sup>[21]</sup>であるため、鋼表面におけるそれとは異なる値が観測される可能性があると考えられる。一方、熱処理シミュレーションに導入する熱伝達率  $h$  は上述 3.1.4.5 および 3.1.4.6 の方法で冷却曲線から同定され、銀試験片での特性温度が  $h$  に反映されることになる。銀という材料によってレスポンスよく測定される状況は維持しながら鋼の特性温度を反映させる測定方法を考案する必要がある。そこでここでは、銀試験片に薄膜の鉄めっきを施した試験片を作成し冷却曲線を測定し、それより熱伝達率  $h_{Fe}$  を同定し、熱処理シミュレーションに導入した。

#### 3.1.8 鉄めっき銀試験片

試験片については JIS K 2242 A 法の銀円柱試験片に、厚さ 100 $\mu$  の純鉄めっきを施した試験片を用いて実験を行い、冷却曲線測定方法は 3.1.3.1 の方法で行った。また、冷却曲線からの熱伝達率の同定については 3.1.4 に示した 3.1.4.5 の方法で行った。

### 3.1.9 鉄めっき銀試験片の実験結果

#### 3.1.9.1 鉄めっき銀試験片の冷却曲線測定結果

Table 3.1 のコールドクエンチ油に投入・浸漬した冷却曲線測定結果を Fig. 3.11 に示す。めっきなし試験片の特性温度  $T_{(s)}$  は  $615^{\circ}\text{C}$ 、特性秒数  $t_{(s)}$  は  $2.2\text{s}$ 、一方鉄めっき試験片の  $T_{(s)}$  は  $677^{\circ}\text{C}$ 、 $t_{(s)}$  は  $1.2\text{s}$  であった。Fig. 3.10 からその差を読み取り Table 3.3 に示した。鉄めっき試験片は、銀試験片よりも蒸気膜が  $1\text{s}$  早く崩壊し特性温度は  $62^{\circ}\text{C}$  高い値を示した。

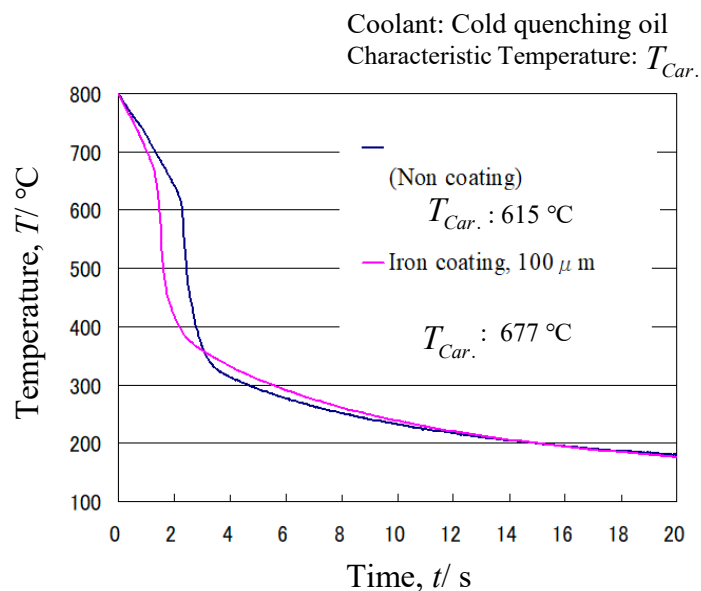


Fig. 3.11 Effect of iron coating on the cooling curves and the characteristic temperatures,  $T_{Car.(s)}$  during quenching of silver cylindrical specimen from  $800^{\circ}\text{C}$  into cold quenching oil at  $80^{\circ}\text{C}$ .

Table 3.3 Effect of iron coating on characteristic temperature,  $T_{Car.(s)}$  and characteristic time,  $t_{Car.(s)}$

	Silver probe (non coating)	Iron coated silver probe	Deference
Characteristic temperature, $T_{Car.(s)}/^{\circ}\text{C}$	615	677	62
Characteristic time, $t_{Car.(s)}/\text{s}$	2.2	1.2	1.0



3.1.9.2 鉄めっき銀試験片の熱伝達率曲線  $h_{Fe}(T)$

冷却曲線から同定した熱伝達率曲線  $h_{Fe}(T)$  を Fig. 3.12 に示す。熱伝達率の最大値は両者 10000  $W \cdot m^{-2} K^{-1}$  を示した。曲線の形状は類似で、鉄めっき試験片の場合、最大値は高温側に 30°Cシフトし、核沸騰に向かって冷却能が急上昇する温度は銀試験片が 641°C、鉄めっき試験片は 682°Cで 41°C高温側にシフトしていることが Fig. 3.12 からわかる。

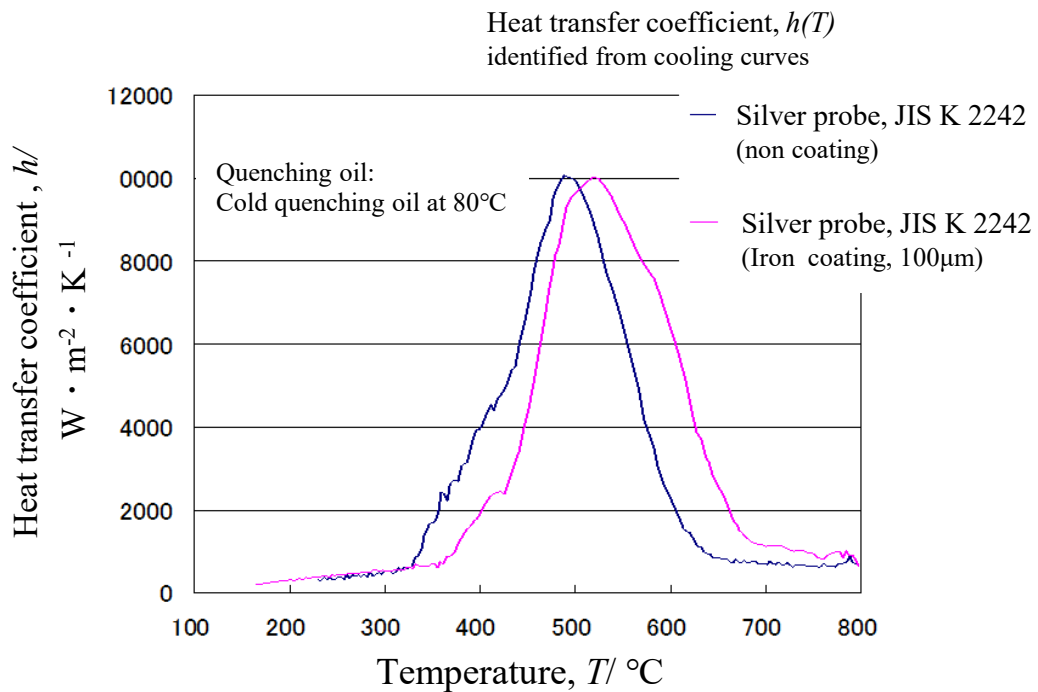


Fig. 3.12 Effect of iron coating for the silver specimen surface to the heat transfer coefficient that was depended on the temperature  $h(T)$ .

3.1.10  $h_{Fe}(T)$  による熱伝達率熱処理シミュレーション

Fig. 3.12 の熱伝達率データを有限要素シミュレーションシステム (HEARTS) に導入し、直径 16mm の SCr420 鋼円柱試験片の熱伝導解析を行った。銀試験片の熱伝達率曲線を用いた内部冷却曲線の計算結果を Fig. 3.13 a), b) に、グラフから読み取った特性温度

$T_{(S,SCr420-16\phi)}$  と特性時間  $t_{(S,SCr420-16\phi)}$  を Table 3.4 に示す。Fig. 3.13 には合わせて温度測定結果を図中赤線で示した。測定値の特性温度はグラフには明瞭に現れていないが、700°C付近と推察される。

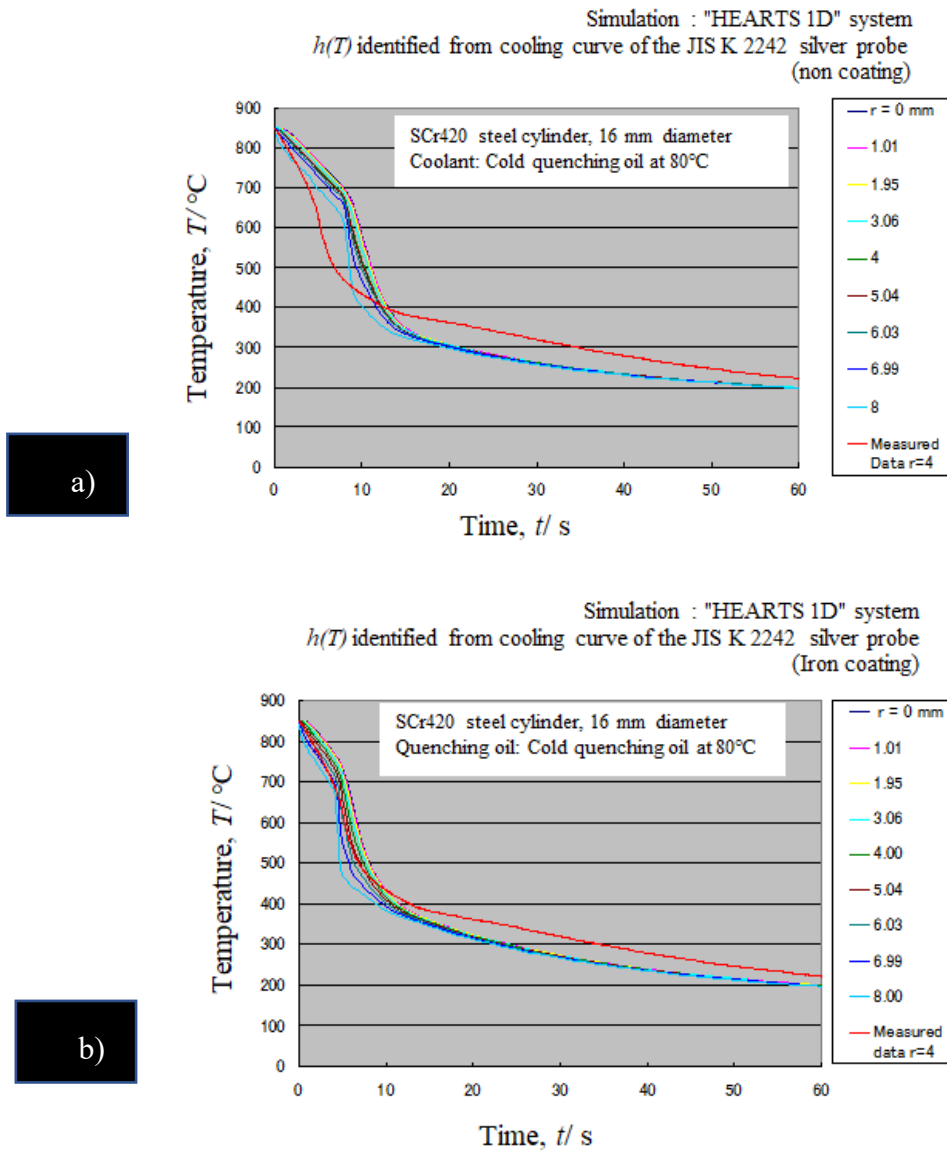


Fig. 3.13 Simulation results of SCr420 steel.

a) The simulation by using heat transfer coefficient  $h(T)$ , that was identified from cooling curve of the silver probe (non coating) specimen. b) The simulation by using heat transfer coefficient  $h(T)$ , that was identified from cooling curve of the iron coated silver probe specimen.

Table 3.4 Characteristic temperature,  $T_{Car.(SCr420-16\phi)}$  and characteristic time,  $t_{Car.(SCr420-16\phi)}$  read from simulation results Fig. 3.13, that were calculated about SCr420 cylinder, diameter 16mm.

	Temperature measured position by the thermocouple	Simulation results (HERTS 1D)					
		$h$ : Identified from cooling curve of silver probe			$h$ : Identified from cooling curve of iron coated silver probe		
<b>Position, mm (Center=0)</b>	<b>7~6</b>	<b>8.00</b>	<b>6.99</b>	<b>6.03</b>	<b>8.00</b>	<b>6.99</b>	<b>6.03</b>
$T_{Car.(SCr420-16\phi)} / ^\circ\text{C}$	660-670	615	663	673	673	700	709
$t_{Car.(SCr420-16\phi)} / \text{s}$	3.9	8.0	7.8	8.0	4.1	3.9	4.3

また、SCr420 材における測定値はシース熱電対で表面の温度を測定したもので、実際の熱電対プローブとしては1~2mm 内部にある場合の測定結果と推察される。

銀試験片の熱伝達率を使った Fig. 3.13 a) の結果計算値では、特性温度  $T_{(S,SCr420-16\phi)}$  として測定され、表面から 1.01mm 内部の曲線で 663°C、特性時間  $t_{(S,SCr420-16\phi)}$  は 7.8s で測定値よりも蒸気膜崩壊は遅く特性温度も低い値となった、一方、Fig. 3.13 b) に鉄めっき試験片の熱伝達率曲線を使った結果では特性温度  $T_{(S,SCr420-16\phi)}$  として測定され表面から 1.01mm 内部で 700°C、特性時間  $t_{(S,SCr420-16\phi)}$  は 3.9s で測定値に近い結果が得られた。

以上から、SCr420 鋼のシミュレーションには鉄めっきの熱伝達率を用いるほうが銀試験片より実態に近いシミュレーション結果が得られることが明らかになった。

次に、鉄めっきの熱伝達率データを用いてコールドクエンチ油と水道水に直径 10mm の SCM420 鋼の焼入れシミュレーション結果を Fig. 3.13 a), b) にそれぞれ示す。両図には、表面 (5mm) から中心部 (0) までの位置の表面および内部冷却曲線を示した。核沸騰の急冷領域でコールドクエンチ油は約 50°C、水道水では 100°C 近く表面と 0.63mm 内部の点で温度差のあることが Fig. 3.13 a) および b) よりわかる。

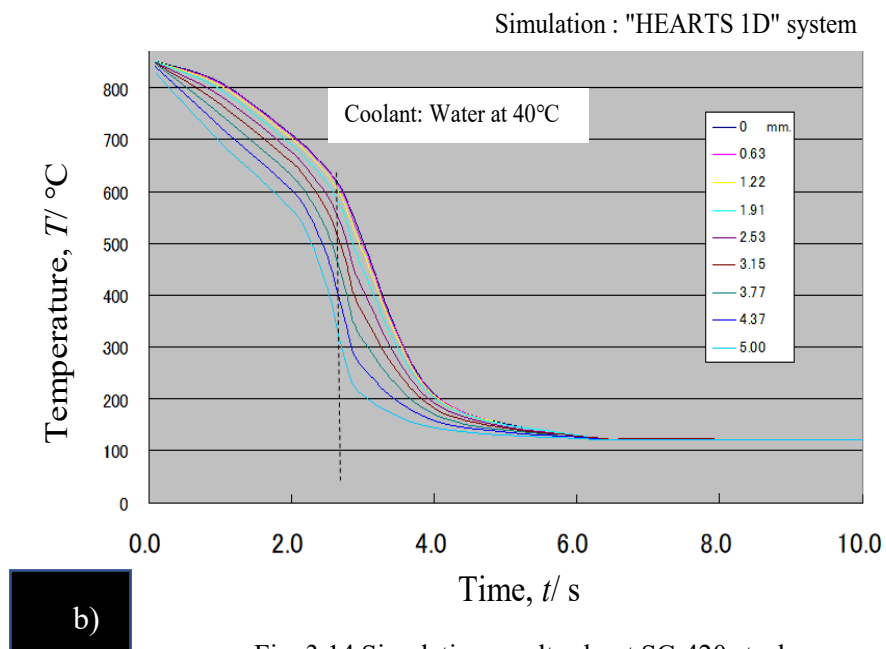
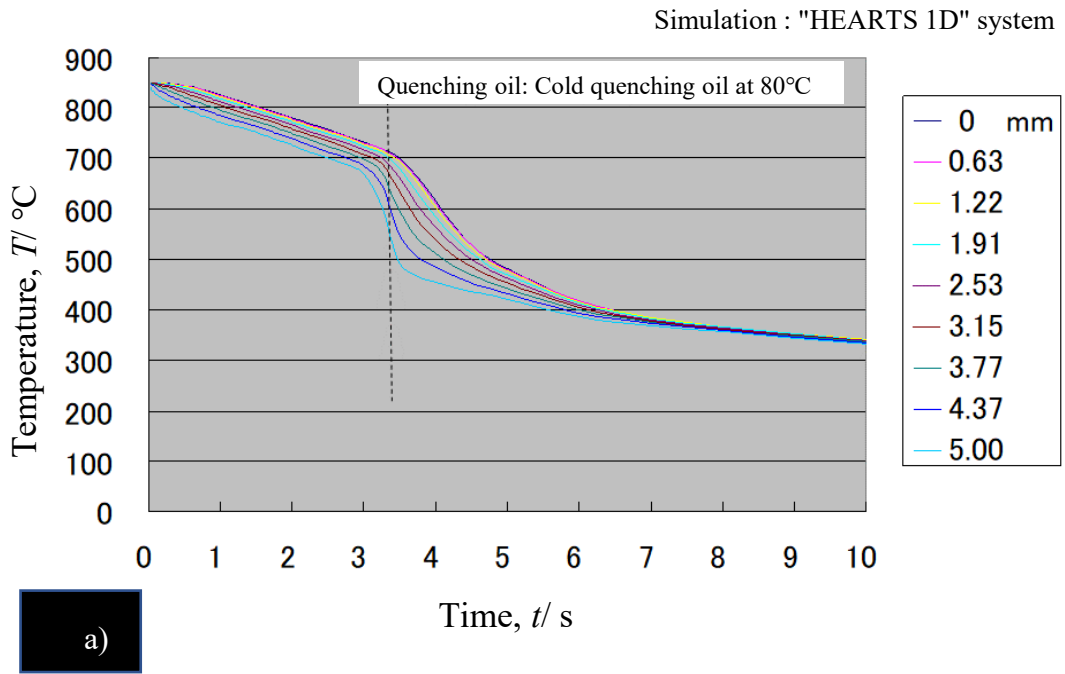


Fig. 3.14 Simulation results about SCr420 steel.

a) Quenching into cold quenching oil. b) Quenching into tap water.

### 3.1.11 銀試験片と鉄めっき銀試験片の違いについて

鉄めっき試験片は JIS K 2242 銀試験片に対し、特性温度は 62°C 高い値を示し、これは銀表面と鉄（めっき）表面形態の違いが影響したものと考えられる。JIS K 2242 銀試験片における冷却曲線は膜沸騰、核沸騰、対流冷却の違いを明確に測定し、油剤に固有の冷却特性を捉えることには適している。しかし焼入れシミュレーションにその熱伝達率曲線を提供する場合には鉄とは異なる挙動となることが確認された。鉄めっきのデータを使用することで実体に近づくシミュレーションができることがわかった。

シミュレーションに使用する熱伝達率データは鋼で測定すべきである。

ただし、変態による体積変化や変態潜熱の影響を受けないようにする必要がある。

### 3.1.12 鋼における表面と内部の温度差

銀試験片の場合、表面と中心部の温度差は最大 10~20°C 程度であるが鋼の場合にはわずか 0.63mm 内部において油冷却で 50°C、水では 100°C 近く異なるというシミュレーション結果が示された。熱伝達率同定のためには表面での温度測定が必要になり、熱電対設置位置などを十分考慮する必要があることが明らかになった。

### 3.1.13 銀試験片を用いた実験のまとめ

銀試験片によって測定される冷却曲線から、解析解を用いて冷却剤の熱伝達率  $h$  を正確に同定する方法を開発した。いくつかの実際のフィールドで用いられる冷却剤について、表面温度に依存する熱伝達率曲線  $h(T)$  を同定した。またその熱伝達率をプリプロセッサに入力し行ったシミュレーション結果と測定値を比較することによって、熱伝達率の値を検証した。

本方法を用いて同定する熱処理用冷却剤の熱伝達率の値を、材料や形状の異なる物体の熱処理シミュレーションに適用することにより、熱処理ひずみなどを高精度に予測することが可能になる。

### 第3章 円柱試験片による測定・熱解析方法

また、鋼の焼入れシミュレーションを行うための熱伝達率導出に用いる冷却曲線は、銀試験片のものを使用するより、表面形態が類似の鉄系材料を使うほうが実体に近い結果が得られる。したがって、シミュレーションに用いる熱伝達率算出のための冷却曲線は銀ではなく相変態しない鋼系を用い、表面温度はできるだけ表面近傍で少なくとも 0.5mm 以下の小径熱電対プローブによって測定すべきことが示唆される結果が得られた。

## 3.2 SUS303 円柱試験片による実験

### 3.2.1 背景と目的

質量の数十倍異なる数百度以上温度差のある 2 つの系が接触し、質量の大きい低温側の液体系は冷却中の温度変化は数°C以下、質量の小さい高温側の固体は 850°Cから 200°C以下に冷却される冷却過程において、液体には沸騰挙動が、固体側には鋼であれば組織変態を伴う応力・ひずみ、熱収縮・膨張などが互いに連成的に影響し合いながら冷却が進行する<sup>[1-6]</sup>。それらの経過を予測することは極めて困難な問題である。また油焼入れのような液体プール冷却は沸騰現象を利用できるため、大きい冷却能をもつが、冷却を阻害する蒸気膜を発生する過程があり、冷却能の低下や予期しない冷却むらを生じ、やっかいな熱処理ひずみを引き起こす原因になるともいわれている。

液体プール冷却には製鉄所や化学プラント、原子炉のシビヤアクシデント時において発生する蒸気爆発は大きな危険をはらむ問題である。またエネルギー変換効率を正確に管理するうえで沸騰問題に対する予測・制御の課題が多くある。

JIS K 2242 熱処理油冷却性能試験方法で規定される銀円柱試験片<sup>第2章<sup>[9]</sup></sup>が熱処理液によって冷却されるとき液体プール冷却に対し、試験片表面の表面温度を測定して得られる液に固有の膜沸騰、核沸騰、および対流熱伝達によって冷却される過程を示す冷却曲線を得ることができる。この冷却曲線から円柱の熱伝導方程式の解析解を用い、円柱側面においてそれぞれ温度ごとに異なる（温度依存）熱伝達率を逆問題的に同定し、有限要素シミュレーションの境界値とする熱伝導解析を行うことが可能になった。

本章では JIS 銀試験片と表面は鋼に類似で組織変態のないオーステナイト系 SUS304 鋼を使用し、蒸気膜の崩壊する特性温度の違いを測定した。また特性温度一定の原則を検証し、銀試験片とステンレス鋼の違いを検討する。

## 3.2.2 実験方法

### 3.2.2.1 冷却曲線

冷却曲線測定には Fig. 3.15 (a) に示す JIS K 2242 銀円柱プローブと、直径 18mm、長さ 50mm の SUS303 製の Fig. 3.15 (b) に示す円柱プローブを使用した。円柱の中心から 30 度の角度で円柱側面の上端面から 2mm の上部、25mm の中央部、下端面から 2mm の下部から図中央部に示す側面 2mm 手前まで達する直径 1mm の穴をあけ、そこに直径 1mm のシース熱電対を挿入した。試験片は、Fig. 3.15 (c) 炉内で  $850 \pm 5^{\circ}\text{C}$  に均一に加熱され、温度  $60^{\circ}\text{C}$  の市販コールドクエンチ油、ダフニーブライトクエンチ油中に投入される。冷却液はタンク底部の内径 35 mm のフローパイプから垂直上方向の流速 0, 13, 26, 39 mm/s で循環させた。循環時は 40 l、流量 0 での静置状態では 30 l で試験を行った。

### 3.2.2.2 実験装置

測定には、Fig. 3.15 (c) に示すように、日商エンジニアリング株式会社製の冷却試験機を使用して実験を行った。試験片を速度 1600mm/s で投入し、冷却を開始する。上述した JIS K 2242 の場合は銀・アルメル熱電対、SUS303 円柱試験片の場合は K 熱電対を使用し上部と中部、下部温度をタートル工業製信号増幅オペアンプ・AD コンバーターTUSB-S01TC2Z を用い 10ms/回 (1kHz) で計測し、経過時間  $t$  に対しての冷却曲線を測定した。

### 3.2.2.3 可視化観察 (高速度 4K ビデオ画像撮影)

冷却曲線を測定するのと同時に現象を観察するために、Nd:YVO<sub>4</sub> レーザーSOC から波長変換結晶を通過し 532 nm の波長に変換され放射されるレーザーシートに映し出される画像を ZEN International Corporation 製 4K カメラ GoPro HERO 6 Black CHDHX-601-FW と SONY RX100V (DSC-RX100M5A) によって前者は 240FPS、60s 後者は 960FPS の高速ビデオ撮影を行った。レーザービームは、Fig. 3.16 のようにセットした。



また、高速度カメラから得られた画像から、株式会社フォトロン製の「FLOgraph-PIV」ソフトウェアを使用して、PIV (Particle Image Velocimetry) 分析を行った。

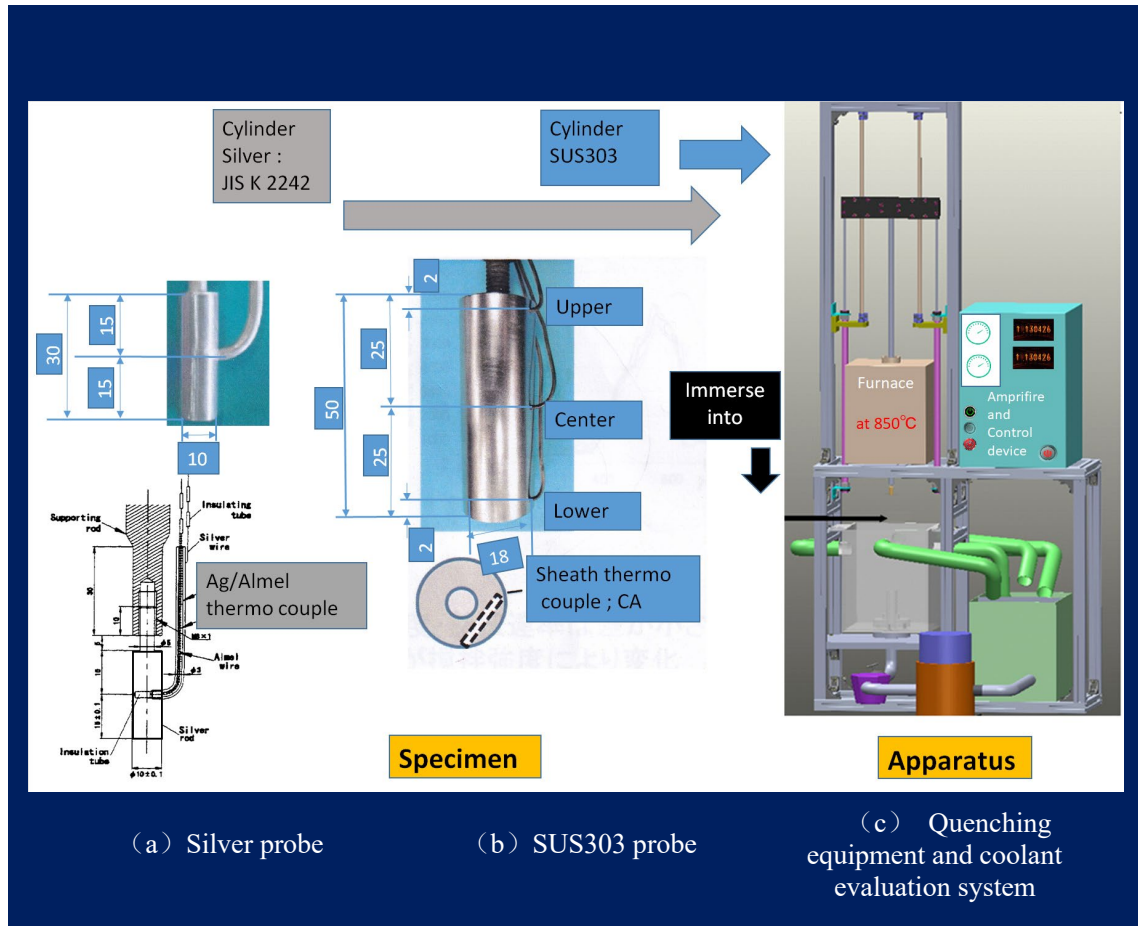


Fig. 3.15 Structure and shape of cylindrical probe specimen (a), (b), schematic diagram of experimental equipment in right side (c).

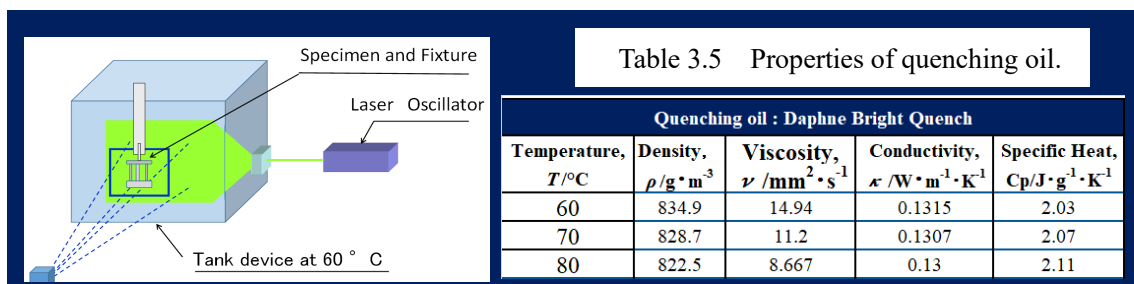


Fig. 3.16 Visualization test equipment.

### 3.2.2.4 熱伝達率の同定・算出と熱処理シミュレーション

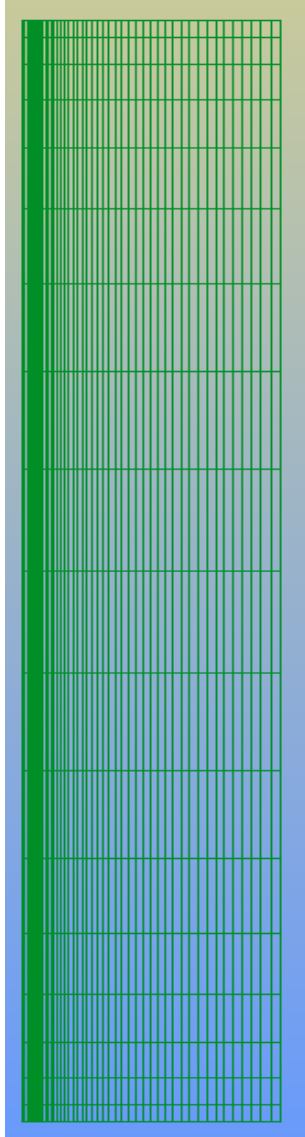


Fig. 3.17 Cylindrical axisymmetric model for 2D heat treatment simulation.

3.1.1 から 3.1.6 の方法により、試料熱処理油中に JIS K 2242 試験片を投入して冷却曲線を測定し、これから熱伝達率を同定する。また、SUS303 表面相当熱伝達率として、特性温度の違いだけ温度をシフトした熱伝達率曲線を算出して用いる。

シミュレーションは、加熱過程を 850°C - 30min とし、Fig. 3.17 に示す軸対称モデルによる CAE 熱処理シミュレーションコード COSMAP の熱伝導解析を行った。境界条件に JIS K 2242 冷却曲線から求める熱伝達率曲線データを入力しシミュレーションを行う。

### 3.2.3 結果と考察

#### 3.2.3.1 冷却曲線測定結果

試料冷却剤の冷却曲線測定結果を Fig. 18 a), b), c), d) に示す。銀試験片と SUS303 円柱中央部については（表面温度を円柱たて方向の中央部で測定し）緩やかに冷却される明確な蒸気膜段階が観察されることが、Fig. 3.18 a), c) よりわかる。一方、SUS303 上部と下部においては、明確な蒸気膜段階は観察されないことが Fig. 3.18 b), d) よりわかる。そして、Fig. 3.18 a), c) から、蒸気膜が崩壊する特性温度は銀試験片と SUS303 円柱中央部について流速 0 から 39mm/s の影響はなく一定であることがわかる。銀試験片では 638°C, SUS303 中央で

は 730°Cを示し、SUS303 は銀より 92°C高い特性温度を示した。また、Fig. 3.18 b), d)から、SUS303 上部と下部において、800°C付近から急冷が始まっていることが観察された。試験片の上部と下部に特性温度は 800°C付近と考えることができる。また、冷却曲線は中央部と同じく、流速 0 から 39mm/s の影響は受けていないことを Fig. 3.18 b), d)は示している。すなわち、銀試験片、SUS303 中央部、上部、下部とも膜沸騰、核沸騰段階における冷却曲線形状は流速の影響を受けない。

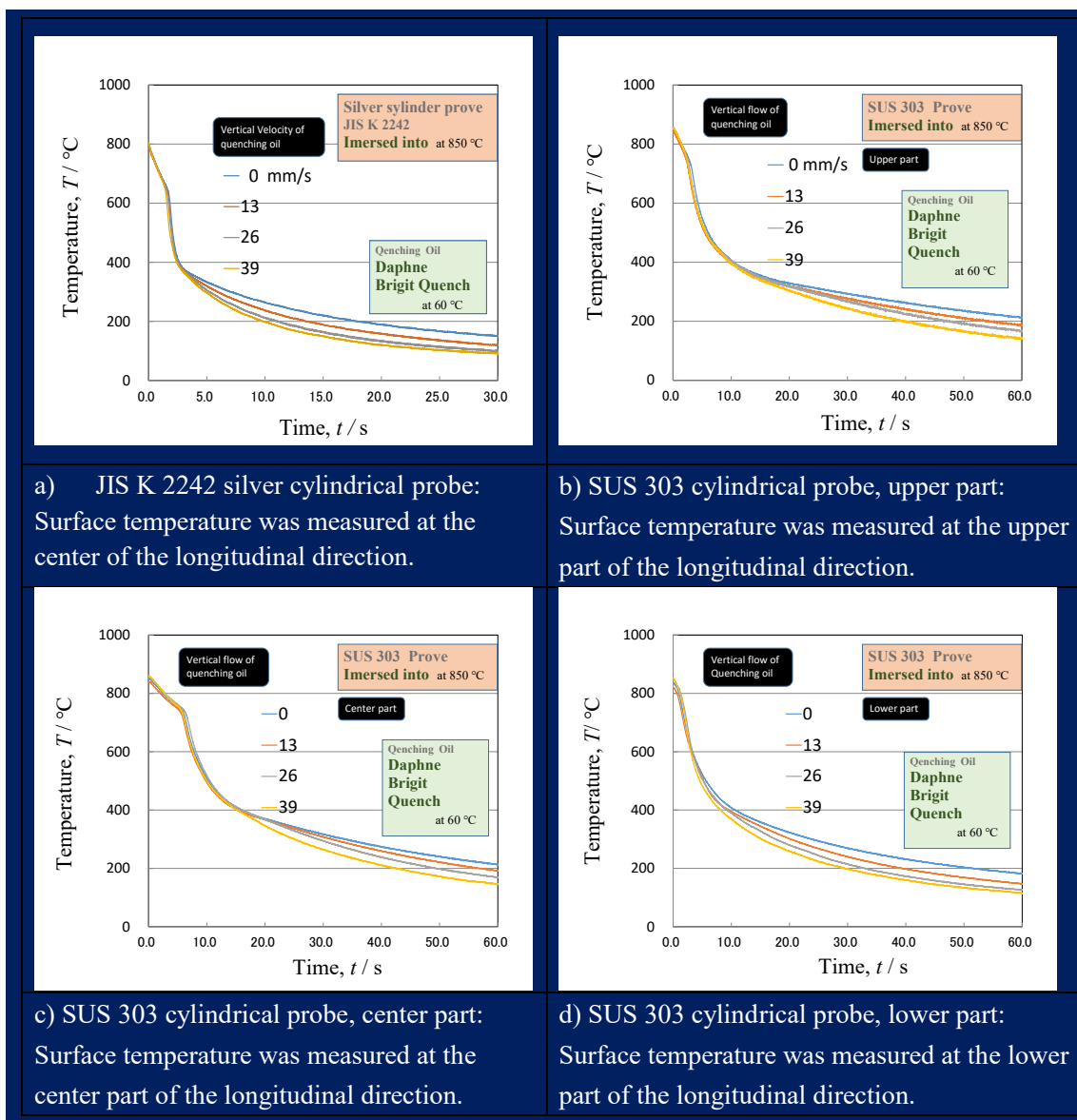


Fig. 3.18 Cooling curves of cylindrical specimen during quenching into vertical flows of cold quenching oil at various speeds.

これに対し、Fig. 18 a), b), c), d) のすべてにおいて、400°C以下では流速の影響が現れている。流速が速いほど早く冷却されることが Fig. 18 a), b), c), d) からわかる。

逆に言うと、流速の影響が現われるのが対流段階の特徴といえる。このように考えると、流速の違いが現われる温度を対流段階開始温度と考えることができる。そこで Tble 3.5 にそれぞれの試験片と温度測定位置における特性温度と対流段階開始温度をまとめて示す。

Tble 3.5 Measurement results of the characteristic temperature and the beginning temperature of convection stage, during quenching from 800 (in silver cylinder) or 850 °C (SUS303) into cold quenching oil at 60 °C.

	Cyrindrical specimen	Temperature measuring position		
		Upper	Center	Lower
Characteristic temperature, $T_{Car.} / ^\circ\text{C}$	Silver	—	638	—
	SUS 303	800	730	800
Beginning temperature of convection stage, $T_{B.t.c.} / ^\circ\text{C}$	Silver	—	380	—
	SUS 303	379	383	500

### 3.2.3.2 可視化実験の結果

Fig. 3.19 (a) は、SUS303 試験片側面の上部、中央、下部における試料冷却剤の冷却曲線を、(b) は、高速度カメラで撮影した画像、(c) は、PIV 視覚化手法を使用して解析した流れ場のベクトル値を示している。試験片投入直後の 0.24s には試験片側面全体が蒸気膜に覆われて温度の低下が始まっていない。1.56s になると、中央部は安定した蒸気膜に覆われているが試験片の上下部では蒸気膜が崩壊を始めている。上下部で冷却曲線に蒸気膜段階が現れないのはすでに崩壊してしまったためと考えられる。4.15s では、中央部も蒸気膜の崩壊が始まっていることが Fig. 3.19 b) からわかる。ベクトル図には核沸騰段階の速い流れが解析され描かれている。6.48s では蒸気膜は中央部でも崩壊し、核沸騰特有の細かい蒸気泡が観察された。

第3章 円柱試験片による測定・熱解析方法

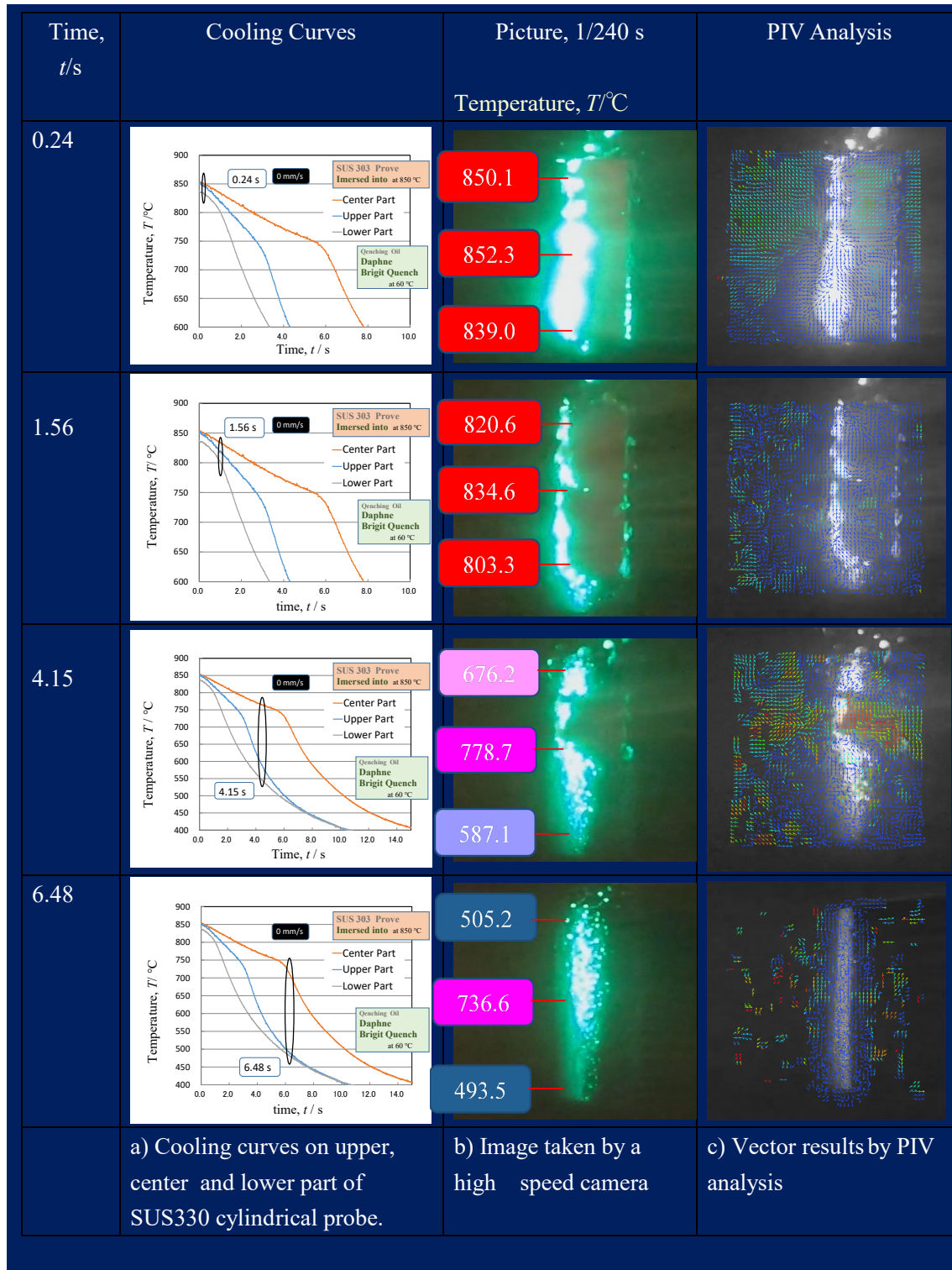


Fig. 3.19 Results of visualization during quenching of SUS303 cylindrical probe specimen from 850 °C into cold quenching oil at 60 °C.

a) Cooling curves. b) Image taken by a high speed camera. c) Vector results of PIV analysis.

3.2.3.3 熱伝達率とシミュレーション結果

Fig. 3.15 a) の JIS K 2242 銀円柱試験片を流量の異なる試料冷却油中に投入したときの冷却曲線からそれぞれ同定された熱伝達率曲線を Fig. 3.20 左に、銀と SUS303 の特性温度の差 92°C をシフトさせた熱伝達率曲線を Fig. 3.20 右に示す。またこのデータを COSMAP の円柱表面境界条件に入力し SUS303 鋼の表面から 3mm 内部の冷却曲線シミュレーション結果と実測値を Fig. 3.21 a), b) に示す。

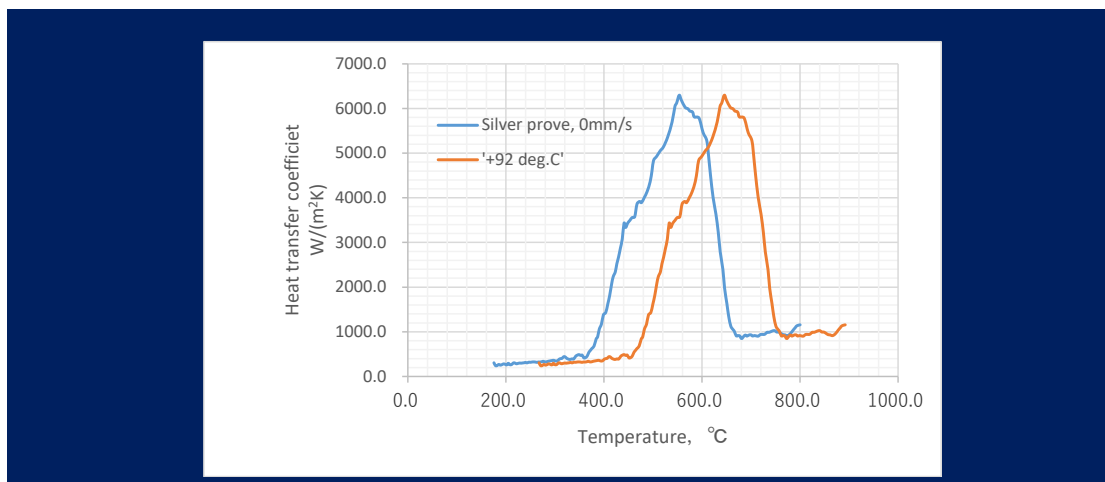
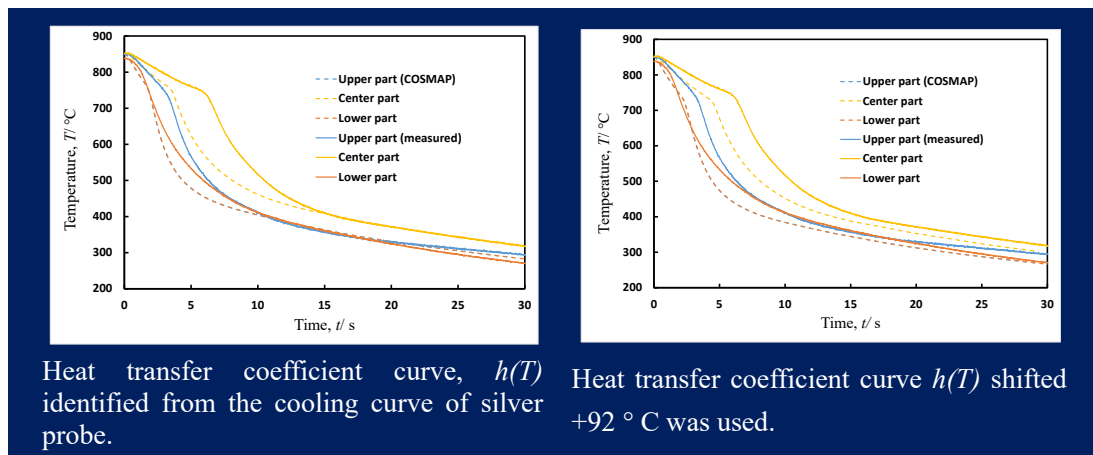


Fig. 3.20 Heat transfer coefficient curves,  $h(T)$  identified from the cooling curve of silver probe (left side), and heat transfer coefficient curve  $h(T)$  shifted +92 ° C



Heat transfer coefficient curve,  $h(T)$  identified from the cooling curve of silver probe.

Heat transfer coefficient curve  $h(T)$  shifted +92 ° C was used.

Fig. 3.21 Simulation results of SUS303 cylinder, diameter = 18 mm (COSMAP 2D system)

Fig. 3.18 a) の銀試験冷却曲線から求めた熱伝達率を用いた SUS303 鋼のシミュレーション結果は測定値との乖離が大きい。SUS303 鋼の特性温度の差だけ高温側にシフトさせた熱伝達率曲線を用いると乖離幅が減少した。上部、中央部については、計算結果が実測値より冷却が早いという結果になった。なお、Fig. 3.18 b), d) に示された上部、下部には蒸気膜が生成しないという実験結果がシミュレーションにも反映されている。

#### 3.2.4 結果のまとめと考察

(1) 特性温度は 0~39mm/s の流速の影響を受けず一定値を示した。蒸気膜段階、核沸騰段階においては、0~39mm/s の流速より格段に大きなエネルギー状態にあるため、0~39mm/s の流速レベルの影響を受けなかったものと考えられる。

(2) 円柱の上下部では蒸気膜崩壊が試験片投入直後からはじまり、崩壊は次第に中央部に向かい移動した。したがって特性温度は円柱の上下方向の位置により異なった。

(3) 中央部で測定された特性温度は銀で 638°C、SUS303 では 730°Cで、材料により異なる値となった。

(4) 対流段階においては 0~39mm/s の流速の影響を受け、流速が大きいほど早く冷却される結果になった。流速の影響を受け始める対流段開始温度は、380°Cで、銀と SUS303 に差はみられない。ただし今回流れの影響を受けやすい試験片下部は対流開始が 500°Cと 120°C高い値を示し、下部は高い温度領域から流速の影響を受けた。下部には 500°Cで蒸気膜、核沸騰もないことが可視化試験でも観察された。

#### 3.2.5 3章結言

(1) 沸騰段階は、核沸騰、核沸騰ともに攪拌や流れの影響を受けにくい。

(2) 円柱上部、または下部では中央とは異なり円柱の場合中央部が最も高い特性温度を示した。特性温度は位置や姿勢の影響を受けて変化する。

(3) 特性温度は材料により異なり銀は SUS303 より 92°C低い値を示した。

### 第3章 円柱試験片による測定・熱解析方法

(4) 対流段階開始温度は材料の影響を受けずほぼ  $380^{\circ}\text{C}$  となった。これは冷却剤の沸点に起因する特性のためと考えられる。ただし円柱の場合今回の下から上に上昇する流れに対して円柱下部は影響を  $500^{\circ}\text{C}$  から受けることが温度測定、可視化実験から明らかになった。

(5) 鋼材のシミュレーションを行う場合、特性温度が鋼に類似の材料で行う必要がある。



第3章参考文献

- [1] 金森英夫, 中村英一, 内田均, 小山三郎, 井上達雄, 熱処理, 第36巻第6号(1996)
- [2] T. Inoue: Thermal Stress III (ed. R. B. Hetnarski) .North-Holland, p. 191 (1988).
- [3] T. Inoue, S. Nagaki, T. Kishino and M. Monkawa: Ingeneur-Archives, 50, 5, p. 315 (1981).
- [4] 井上達雄, 有本享三, 巨東英: 日本熱処理技術協会平成3年秋期講演大会, 講演概要集, p. 27 (1991)
- [5] 有本享三, 生田文昭, 井上達雄: 熱処理, 34, p. 332 (1994).
- [6] 井上達雄, 大森隆弘, 佐久間淳: 材料学会43期学術講演会, 講演論文集, p. 219 (1993).
- [7] T. Inoue.: International Seminar on Microstructures and Mechanical Properties of New Engineering Materials, Tsu, Aug., 3-5, p. 515 (1993).
- [8] 田村今男: 学位論文, “鋼の焼入れ冷却剤の冷却能に関する研究”, p. 51 (1958).
- [9] M. Ozisik: “HEAT CONDUCTION FUNDAMENTALS”, HEAT CONDUCTION Second Edition, New York U.S.A., JOHN WILRY & SONS, INC., 1993, pp.99-118 (1993).
- [10] 田島一郎, 近藤次郎編: 微分方程式フーリエ解析, 培風館, pp.40-54 (1968).
- [11] 川下研介: 熱伝導論, オーム社, pp. 161-167 (1966).
- [12] 奈良崎道治, 淵沢定克, 慶野作, 武田信男: 第18回日本伝熱シンポジウム講演論文集, p. 421 (1981).
- [13] Y. Kikuchi, T. Hori, I. Michiyoshi: Int. J. Heat Mass Trans. 28, 16, p.1105 (1985).
- [14] Y. Kikuchi, T. Hori, H. Yanagawa and I. Michiyoshi: Trans. ISIJ, 26, p. 576 (1986).
- [15] 菊池義弘, 永瀬睦, 岐美格: 日本機械学会論文集, B, 8, 87, 1022, p.2830 (1988).
- [16] 菊池義弘, 野垣拓也, 松本隆一: 日本機械学会論文集 B, No. 89, 1154, p.2038 (1990).
- [17] Hong Hu, Cheng Xu, Yang Zhao, Kirk J. Ziegler & J. N. Chung, “Boiling and quenching heat transfer advancement by nanoscale surface modification”, SCIENTIFIC REPORTS, [7:6117|DOI:10.1038/s41598-017-06050-0, pp. 1-16, (2017).

### 第3章 円柱試験片による測定・熱解析方法

- [18] 井上達雄：機械学会誌，2月号，p.132（1994）．
- [19] 井上達雄：材料，42，483，p.1469（1993）．
- [20] 遠藤元男，小口八郎：日本の伝統技術と職人表面技術史，横書店（1975）．
- [21] 井上達雄：BOUNDARY，11，11，p.36（1995）．
- [22] 井上達雄：まてりあ，35,2，p.174（1996）．
- [23] 井上達雄：日本刀の科学，日刊工業新聞社（2017）

## 第4章 SUS303, SUS304 製円板試験片による研究

4.1	<u>概要</u> .....	95
4.2	<u>本章緒言</u> .....	97
4.3	<u>実験方法</u> .....	97
4.3.1	<u>試験片</u> .....	97
4.3.2	<u>実験装置と試験冷却液</u> .....	97
4.3.3	<u>冷却曲線の測定</u> .....	98
4.3.4	<u>高速度 4K ビデオ画像撮影</u> .....	98
4.4	<u>熱伝導方程式とその解法</u> .....	100
4.4.1	<u>上下面で異なる熱伝達境界を持つ一次元熱伝導方程式</u> .....	100
4.4.2	<u>式の無次元化</u> .....	120
4.5	<u>熱伝達率の同定手順</u> .....	146
4.6	<u>有限要素シミュレーションモデル</u> .....	148
4.7	<u>結果と考察</u> .....	149
4.7.1	<u>冷却曲線測定結果</u> .....	149
4.7.1.1	<u>SUS303Disc の結果</u> .....	149
4.7.1.2	<u>SUS304Disc の結果</u> .....	152
4.7.2	<u>可視化実験結果</u> .....	153
4.7.2.1	<u>240FPS における観察結果</u> .....	153
4.7.2.2	<u>960FPS における PIV 解析結果</u> .....	156
4.7.3	<u>熱伝達率曲線</u> .....	163
4.7.4	<u>シミュレーション結果</u> .....	164
4.7.5	<u>冷却曲線と可視化観察結果の対比</u> .....	165

## 第4章 SUS303, SUS304 製円板試験片による研究

<u>4.7.6</u>	<u>特性温度について</u> .....	165
<u>4.8</u>	<u>結果のまとめ</u> .....	166
	<u>第4章参考文献</u> .....	168

## 第4章 SUS303, SUS304製円板試験片による研究

### 4.1 概要

油焼入れは沸騰現象を利用できる効率の良い熱処理冷却方法といえるが発生する蒸気膜の存在は冷却能低下を招き、予期しない不安定な挙動は熱処理工程で最大の問題である熱処理ひずみ発生の原因となる場合がある。

本章では現在まで広く用いられている円柱状試験片ではなく、蒸気膜が残留し易いステンレス鋼円板試験片を焼入れ油中に水平に投入するプール冷却実験を行った。冷却の状況は、表面温度変化を正確に冷却曲線としてとらえ、同時にレーザーシート上の画像として捕える実験を行い観察した。実験では、上下面に第一沸騰段階が油冷却としてはじめて明確に観察され、続く蒸気膜段階から核沸騰段階は上面と下面で大きく異なる挙動を示す冷却曲線が得られた。平板に対する熱伝導方程式の解析解を用い、上述冷却曲線から上下面における温度依存)熱伝達率を逆問題的に同定した。本データを用い有限要素シミュレーションコード“COSMAP”による熱伝導、変態、応力・ひずみ解析を行った。上下面で異なる冷却を受けたときの熱処理ひずみ発生の状況が計算され、測定値に一致する結果が得られた。一連の手法は熱処理工程で最大の問題とされる熱処理ひずみに及ぼす冷却剤の影響を評価し得る。また、プール冷却における冷却液の挙動把握、原因解析・予測に利用できる<sup>[1]</sup>。

### 4.2 本章緒言

油焼入れ工程などでは、800~900°Cの温度に赤く熱せられた鋼片個体が、その数十倍の質量を持ち、沸点が300~400°Cを有する油中に投入される。冷却初期は固体表面が蒸気膜で覆われる膜沸騰状態から蒸気膜が崩壊する特性温度を経てその後核沸騰状態に至り、最終的に対流段階に達する冷却過程をたどる<sup>第2章[10,11], 第3章[1]</sup>。この間、核沸騰段階では、気化潜熱に加え蒸気泡崩壊・消失による自己攪拌を起し、より一層大きな冷却能を得ることが可

能となる<sup>[2]</sup>。また沸点（対流段階開始温度）以下の対流段階では与える流速により冷却能を制御できる領域を持つ。上述のように油冷却は多様な手段を持つ有用な冷却方法といえる。

しかし、蒸気膜は冷却を阻害する<sup>第2章[11]</sup>。そしてその形状、位置、温度、流量などに応じた膜形成の開始または崩壊温度（特性温度）が変動すれば、冷却は不均一になり、その結果熱処理プロセスで最大の問題である熱処理ひずみを引き起こし得る。

このような冷却剤の挙動や処理物の位置・姿勢などに応じて作り出される接触状態の影響を受けながら金属表面から冷却剤に向かって熱の移動がおこり、冷却過程は進行する。このときの温度を試験片の中心で測定する場合、実際の表面温度変化から遅れを生じ<sup>第2章[10]</sup>、表面における温度変化を正確に読み取ることが困難となる。一方 JIS K 2242 A に規定される銀・アルメル熱電対一体型の銀円柱の側面で表面温度を測定する方法は蒸気膜、核沸騰、対流段階を経て冷却される冷却剤に固有の表面における温度変化を忠実に示すことができる。しかしながら、第3章 3.1.8 から 3.1.13 に述べた実験事実から、銀試験片の場合、蒸気膜が崩壊する特性温度は鋼に比べ 60–100℃低く測定される問題があった。また、円柱試験片における測定では蒸気膜が停滞する状況や逆に蒸気膜が抜け去る部分の挙動を同時に測定することができなかった。

本章では炭素鋼表面に類似の表面を持つ SUS303, SUS304 製平板試験片を焼入れ油中に水平に投入するプール冷却実験を行い、冷却の状況は、溶接した熱電対素線の接点を表面直下に固定する方式で表面温度を正確に遅れなく測定し、蒸気膜の停滞しやすい下面と抜けやすい上面の2点における温度変化の推移を冷却曲線としてとらえた。

その結果、冷却開始直後、上下面とも蒸気膜形成前に瞬間的に現れる第一沸騰段階、続く蒸気膜段階からは上面と下面で大きく異なる冷却過程を表す冷却曲線が観測された。

平板内部を均質・等方性として設定される熱伝導方程式と、上下境界面より外側ではニュートン冷却を基本とする熱の放散があるとする境界条件を設定した。また、冷却曲線を 1～12℃ごとに 60–100 の温度間隔に分割し、それぞれに対して熱伝導方程式の解析解、初期条

件, 境界条件を適用し, 温度依存上面熱伝達率  $h_1(T)$ , 下面熱伝達率  $h_2(T)$  を逆問題的に同定した. 冷却曲線とハイスピードカメラの映像を比較・観察するとともに, 同定した  $h_1(T)$ ,  $h_2(T)$  を境界条件に適用する熱処理シミュレーション<sup>第1章[16-20], [4,5]</sup>を行い冷却剤の熱処理ひずみの特性を求める試みもおこない測定値に一致する結果になった.

### 4.3 実験方法

#### 4.3.1 試験片

Table 4.1 に示す化学組成の SUS304 材を使用した内径 35.0mm, 厚さ 10.0mm の円板状試験片を, Fig. 4.1 (a) の上側に示す内径 35.2mm, 外径 49.0mm のリング状治具に側面から約  $1\text{ mm}^2$  以下の接触面積を持つ 3 つの止めねじで固定した. これにより, ディスク試験片側とリング状治具の側面に 0.1mm の隙間が形成され, 断熱壁が形成される形状の試験片で実験を行った.

また, リングの側面から試験片の上面と下面のそれぞれの中心に向かって, 水平面に対してそれぞれ  $6.74^\circ$  の角度で斜めの穴を開け, Fig. 4.1 (a) 下に示すように, 各面の中心直下  $20\sim 50\mu\text{m}$  の位置に, 外径 1mm のシース熱電対から外径 0.2mm の素線 2 本 (Chromel 線, Alumel 線) を引き出し電気溶接した直径 0.3mm の接点を銀ペーストで斜め穴先端 (最深部に) 固定した. また, ディスク中心の深さ 5mm の位置にリングの側面から被覆熱電対を水平に挿入し, ディスク中心部の温度を測定した.

#### 4.3.2 実験装置と試験冷却液

冷却実験は, 日商エンジニアリング株式会社製の冷却試験機を使用して実験を行った.

冷却剤としては, 前章 Table 3.2 に示す性状の市販コールドクエンチ油であるダフニープライトクエンチ 40 $\ell$  を用い, 液温  $60\pm 3^\circ\text{C}$  で実験を行った. 補助タンクを使い流量を設定する循環供給では 40 $\ell$ , 流量 0 の場合は補助タンク使用しない 30 $\ell$  で実験を行った.

### 4.3.3 冷却曲線の測定

試験片とリングホルダーは Fig. 4.1 b) 上に示す炉内で均一に  $850 \pm 5^\circ\text{C}$  に加熱され Fig. 4.1 b) の下に示す試料熱処理油中に炉中央から 0.28s で油面まで達する 1600mm/s の速度で落下させ冷却を開始する。上述した上面と下面、内部温度をタートル工業製信号増幅オペアンプ・AD コンバーター TUSB-S01TC2Z を用い 10ms/回 (1kHz) で計測し、経過時間  $t$  に対しての冷却曲線を測定した。

### 4.3.4 高速度 4K ビデオ画像撮影

熱挙動とその現象を観察するために、Nd:YVO<sub>4</sub> レーザーSOC から波長変換結晶を通過し 532 nm の波長に変換され放射されるレーザーシートに映し出される画像を ZEN International Corporation 製 4K カメラ「GoPro HERO 6 Black CHDHX-601-FW」と「SONY RX100V (DSC-RX100M5A)」によって前者は 240FPS、後者は 960FPS の高速ビデオ撮影を行った。レーザービームは、Fig.4.2 の概略図に示すようにセットした。

今回は特に下面下部に残存する蒸気膜を観察するため、水平に対して  $-7.2^\circ$  の角度で入射させた。実体画像と試験片後方にできる影も撮影できるようレーザービームを調整した。

Table 4.1 Chemical compositions in mass % of stainless steel used

	C	Si	Mn	P	S	Ni	Cr	Cu
SUS303	0.07	0.18	1.73	0.040	0.37	8.87	17.61	—
SUS304	0.04	0.49	1.38	0.039	0.022	8.06	18.05	0.19



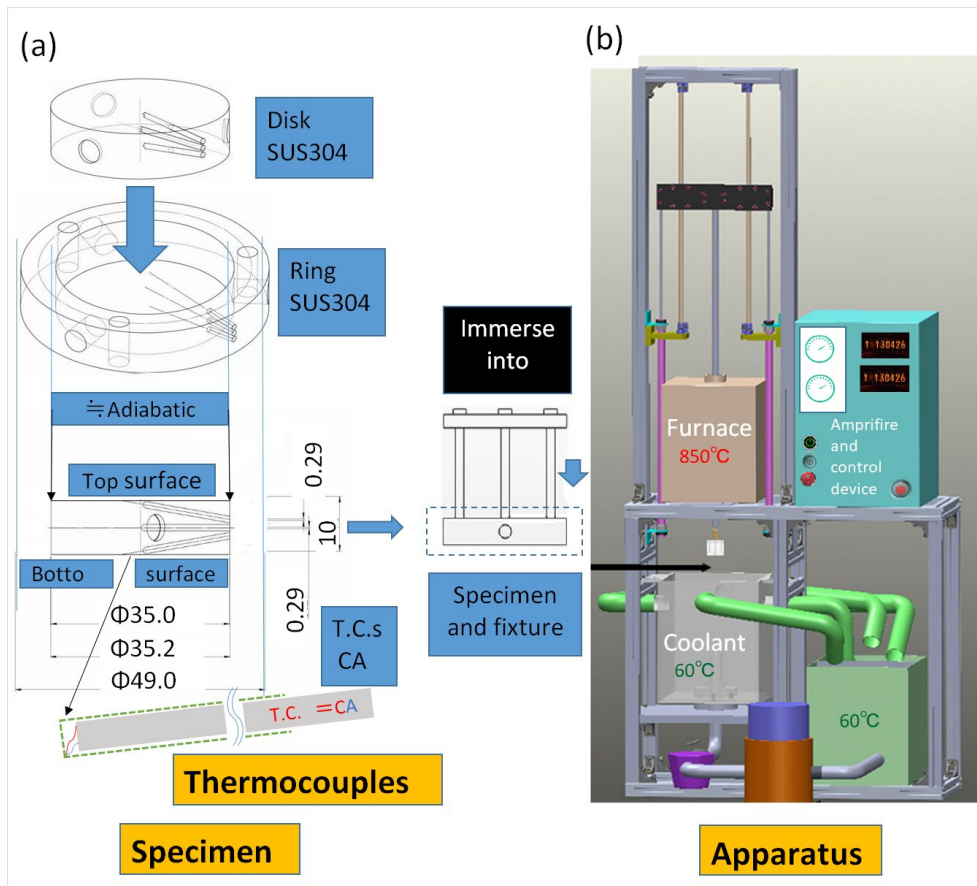


Fig. 4.1 Structure and shape of disc probe left side, Schematic diagram of experimental equipment in right side<sup>7</sup>.

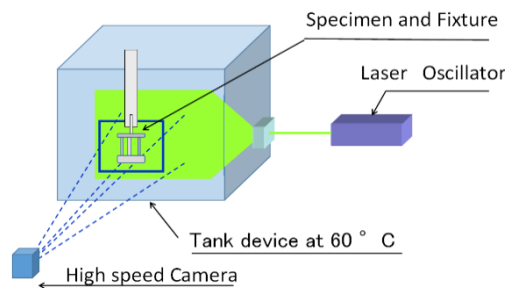


Fig. 4.2 Schematic diagram of visualization device<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Hideo Kanamori, and Dong-Ying Ju

Materials Transactions, "Identification of Heat Transfer Coefficients and Simulation of Quenching Distortions on Disk Probe", vol.61, No.5

#### 4.4 熱伝導方程式とその解法

##### 4.4.1 上下面で異なる熱伝達境界を持つ一次元熱伝導方程式

冷却実験に用いる図 1 の円板試験片内の厚さ方向の温度分布と冷却中の熱流れを計算するために熱伝導方程式を利用する。試験片側面が 4.3.1 で述べたように断熱状態に設定されていることから、一次元（無限円板）モデルを仮定できる。

Fourier の法則から導かれる式 (3-10) の 3 次元熱伝導方程式は、温度  $T$  の固体表面より熱伝達率  $h_1, h_2$  で温度  $T_\infty$  の冷却剤中にニュートン冷却される厚さ  $L$  の無限平板として次式で記述できる。

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{in } 0 < x < L, t > 0 \quad (4-1)$$

と表される。

境界条件は

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + h_1 (T - T_\infty) = 0 \quad \text{at } x = 0, t > 0 \quad (4-2a)$$

$$k_2 \frac{\partial T}{\partial x} + h_2 (T - T_\infty) = 0 \quad \text{at } x = L, t > 0 \quad (4-2b)$$

初期条件は

$$T - T_\infty = F(x) \quad \text{when } t = 0, \text{ in } 0 \leq x \leq L \quad (4-3)$$

と書くことができる。

これを解くために、場所  $x$  と時間  $t$  の関数である温度  $T$  を

$$T(x,t) - T_\infty(x_\infty) = X(x)\Gamma(t) \quad (4-4)$$

のように変数分離すると、 $T_\infty(x_\infty)$  は領域外 ( $x > L$ ) の定数で、式 (4-1) は

$$\Gamma \frac{d^2 X}{dX^2} = \frac{1}{\alpha} X \frac{d\Gamma(t)}{dt} \quad (4-5)$$

となるから、 $x$  と  $t$  の関数を整理して

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dX^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma(t)}{dt} \equiv -\beta^2 \quad (4-6)$$

とおくことができる。

式(4-6) から2個の常微分方程式

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \alpha\beta^2\Gamma = 0 \quad (4-7)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \quad (4-8)$$

が成り立つことがわかる。

ところで式(4-7) の一般解は

$$\Gamma(t) = C \cdot e^{-\alpha\beta^2 t} \quad (4-9)$$

である。ここで、式(4-6) の右辺を負としたのは、式(4-9) から、 $\Gamma$ は $t$ とともに減少するという物理的事実に合致させるためである。これに対して、もし式(4-6) を正とすると、 $\Gamma(t) = e^{+\alpha\beta^2 t}$ となり、 $t$ とともに増大し、発散する。

一方、式(4-8) の一般解は、 $A$ 、 $B$ を積分定数として

$$X = X(\beta, x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x \quad (4-10)$$

である。

なお、式(4-9) は、微分して

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = C \cdot (-\alpha\beta^2) \exp(-\alpha\beta^2 t) \quad \text{すなわち} \quad \frac{d\Gamma(t)}{dt} + \alpha\beta^2\Gamma(t) = 0$$

式(4-7) に、

また、式(4-10) は、微分して

$$\begin{aligned} \frac{dX(x)}{dx} &= \beta(-A \sin \beta x + B \cos \beta x), \\ \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= -\beta^2 (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (4-11) \\ \text{すなわち} \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta^2 X(x) &= 0 \end{aligned}$$

式 (4-8) になることが確かめられる。

ここで、式 (4-10) について、境界値問題で、係数 A, B の関係を求める。

まず、式 (4-4) から、

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{dX(x)}{dx} \cdot \Gamma(t)$$

式 (4-2a), (4-4) より、

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + h_1 T = -k_1 \frac{dX(x)}{dx} \cdot \Gamma(t) + h_1 X(x) \Gamma(t) = \Gamma(t) \left\{ -k_1 \frac{dX(x)}{dx} + h_1 X(x) \right\} = 0$$

式 (4-2b), (4-4) より、

$$k_2 \frac{\partial T}{\partial x} + h_2 T = k_2 \frac{dX(x)}{dx} \cdot \Gamma(t) + h_2 X(x) \Gamma(t) = \Gamma(t) \left\{ k_2 \frac{dX(x)}{dx} + h_2 X(x) \right\} = 0$$

$\Gamma(t) \neq 0$ ,

$$-k_1 \frac{dX(x)}{dx} + h_1 X(x) = 0 \quad \text{at } x=0 \quad (4-12a)$$

$$k_2 \frac{dX(x)}{dx} + h_2 X(x) = 0 \quad \text{at } x=L \quad (4-12b)$$

いま、境界条件 (12a) では、 $x=0$  において、式 (11) より、 $\dot{X}(0) = \beta B$  ,

式 (10) より、 $X(0) = A$  となり、これより、

$$-k_1 \beta B + h_1 A = 0$$

$$B = \frac{H_1}{\beta} \cdot A, \quad \frac{B}{H_1} = \frac{A}{\beta}, \quad \frac{\beta B}{H_1} = A \quad (4-13)$$

の関係が得られる。

$$X = X(\beta, x) = A \cos \beta x + \frac{H_1}{\beta} \cdot A \sin \beta x = A \left( \cos \beta x + \frac{H_1}{\beta} \cdot \sin \beta x \right)$$

ただし

$$H_1 \equiv \frac{h_1}{k_1}, \quad H_2 \equiv \frac{h_2}{k_2} \quad (4-14)$$

$$X = \frac{A}{\beta} (\beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x) \quad (4-15)$$

$$X = \frac{B}{H_1}(\beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x) \quad (4-16)$$

$$\frac{dX(x)}{dx} = \beta \frac{A}{\beta}(-\beta \sin \beta x + H_1 \cos \beta x) \quad (4-17)$$

$$\frac{dX(x)}{dx} = \beta \frac{B}{H_1}(-\beta \sin \beta x + H_1 \cos \beta x) \quad (4-18)$$

また、境界条件式 (4-12b) では、 $x = L$  で、

$$\beta \frac{A}{\beta}(-\beta \sin \beta L + H_1 \cos \beta L) + H_2 \frac{A}{\beta}(\beta \cos \beta L + H_1 \sin \beta L) = 0$$

または

$$\beta \frac{B}{H_1}(-\beta \sin \beta x + H_1 \cos \beta x) + H_2 \frac{B}{H_1}(\beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x) = 0$$

$\frac{A}{\beta}$ ,  $\frac{B}{H_1}$  はそれぞれ消去され

$$\beta(-\beta \sin \beta L + H_1 \cos \beta L) + H_2(\beta \cos \beta L + H_1 \sin \beta L) = 0 \quad (4-19)$$

となる。

ここに式 (4-13) は

$$\frac{B}{H_1} = \frac{A}{\beta} = 1 \quad (4-20)$$

とし、固有関数の係数が 1 となるよう  $\beta$  と  $H_1$  を関係付ける。

これは積分定数  $A$ ,  $B$  を消し去るものではなく、 $A = \beta$ ,  $B = H_1$  に設定するという事である。これが固有値、ノルムに影響するかという問題については、無次元化の節で詳細に確認する。

そして式 (4-19) は

$$(-\beta \sin \beta L + H_1 \cos \beta L) + \frac{H_2}{\beta}(\beta \cos \beta L + H_1 \sin \beta L) = 0$$

$$-\beta \sin \beta L + H_1 \cos \beta L + H_2 \cos \beta L + \frac{H_1 H_2}{\beta} \sin \beta L = 0$$

$$(H_1 + H_2) \cos \beta L - \left( \beta - \frac{H_1 H_2}{\beta} \right) \sin \beta L = 0$$

$$(H_1 + H_2) \cos \beta L = \left( \beta - \frac{H_1 H_2}{\beta} \right) \sin \beta L$$

$$\therefore \tan \beta L = \frac{\beta(H_1 + H_2)}{\beta^2 - H_1 H_2} \quad (4-21)$$

ここで (4-20) から

$$X = \beta \cos \beta x + H_1 \sin \beta x \quad (4-22)$$

$$\frac{dX(x)}{dx} = \beta(-\sin \beta x + H_1 \cos \beta x) \quad (4-23)$$

境界条件式 (4-12b) から式 (4-21) が導かれ式 (4-23) の関係が得られる。

なお,  $H_1 = H_2 = H$  の場合, 式 (4-21) は

$$\tan \beta L = \frac{2\beta H}{\beta^2 - H^2} \quad (4-24)$$

となる。

このように, 固有値 (4-21) を満足する, すなわち境界条件 (4-12a) と (4-12b) を満足する解は多数あり, すべてが解であり, これらの和もまた解である。

式 (4-8) にもどると

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta^2 X(x) = 0 \quad \text{in } 0 < x < L$$

境界条件式は (4-12a), (4-12b) は

$$-k_1 \frac{dX}{dx} + h_1 X = 0 \quad \text{at } x = 0$$

$$k_2 \frac{dX}{dx} + h_2 X = 0 \quad \text{at } x = L$$

であった。これから, 場所  $x$  と固有値  $\beta_m$  を含む関数  $X(\beta_m, x)$  は固有関数で,

$$X(\beta_m, x) = X_m = \beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x \quad (4-25)$$

と表される。

またその重ね合わせである

$$X = \sum_{m=1}^n \beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x \quad (4-26)$$

もまた、固有関数である。

いま、 $Z_m \equiv \frac{d}{dx} \frac{dX(\beta_m, x)}{dx}$ , とおいて

$$\frac{d}{dx} \frac{dX_n(\beta_n, x)}{dx} + \beta_n^2 X(x) = 0 \quad \dots\dots Z_n + \beta_n^2 X_n = 0 \quad (4-27)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{dX_m(\beta_m, x)}{dx} + \beta_m^2 X(x) = 0 \quad \dots\dots Z_m + \beta_m^2 X_m = 0 \quad (4-28)$$

と簡略化する。

(4-26) に  $X_n$  を乗じ ( $X_n Z_m + \beta_m^2 X_n X_m = 0$ ), (4-25) に  $X_m$  を乗じ

( $X_m Z_n + \beta_n^2 X_m X_n = 0$ ) 差をとると,

$$X_n Z_m - X_m Z_n + (\beta_m^2 - \beta_n^2) X_n X_m = 0$$

$$X_n X_m = \frac{X_n Z_m - X_m Z_n}{\beta_n^2 - \beta_m^2}$$

Z を書き直すと

$$X_n X_m = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} \left\{ X_n \frac{d}{dx} (X_m') - X_m \frac{d}{dx} (X_n') \right\}$$

n 系, m 系は互いに独立であるから,

$$X_n X_m = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} \left\{ \frac{d}{dx} (X_n X_m') - \frac{d}{dx} (X_m X_n') \right\}$$

右辺の { } 内を統合して両辺を積分すると,

$$\int_0^L X_n X_m dx = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} \int_0^L \frac{d}{dx} (X_n X_m' - X_m X_n') dx \quad (4-29)$$

$$\therefore \int_0^L X_n X_m dx = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} [X_n X_m' - X_m X_n']_0^L$$

$$\int_0^L X_n X_m dx = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} [X_n X_m' - X_m X_n']_0^L$$

$$= \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} \{X_n(L) X_m'(L) - X_m(L) X_n'(L)\} - \{X_n(0) X_m'(0) - X_m(0) X_n'(0)\}$$

ここで、境界条件 (4-12a) より

$$-k_1 X_n'(L) + h_1 X_n(L) = 0, \quad X_n'(L) = \frac{h_1}{k_1} X_n(L)$$

$$-k_1 X_m'(L) + h_1 X_m(L) = 0, \quad X_m'(L) = \frac{h_1}{k_1} X_m(L)$$

境界条件 (4-12b) より,

$$k_2 X_n'(0) + h_2 X_n(0) = 0, \quad X_n'(0) = -\frac{h_2}{k_2} X_n(0)$$

$$k_2 X_m'(0) + h_2 X_m(0) = 0, \quad X_m'(0) = -\frac{h_2}{k_2} X_m(0)$$

$$\int_0^L X_n X_m dx = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} \left[ \underbrace{X_n(L) \frac{h_1}{k_1} X_m(L) - X_m(L) \frac{h_1}{k_1} X_n(L)}_0 + \underbrace{X_n(0) \frac{h_2}{k_2} X_m(0) - X_m(0) \frac{h_2}{k_2} X_n(0)}_0 \right]$$

すなわち  $m \neq n$  で,

$$\int_0^L X_n X_m dx = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_m^2} \int_0^L \frac{d}{dx} (X_n X_m' - X_m X_n') dx = 0 \quad (4-30)$$

$X_n$  と  $X_m$  は互いに直交関係にあることがわかる。

一方,  $m = n$  では,

$$\int_0^L X_n X_n dx = \frac{1}{\beta_n^2 - \beta_n^2} \int_0^L \frac{d}{dx} (X_n X_n' - X_n X_n') dx = 0 \quad (4-31)$$

この右辺の分子, 分母ともに 0 となり不定となる. しかし, ロピタルの定理を用いると

$\lambda_n \rightarrow \lambda_m$  の極限において



$$\frac{\lim_{n \rightarrow m} \frac{dG}{d\beta_n}}{\lim_{n \rightarrow m} \frac{dY}{d\beta_n}} = \lim_{n \rightarrow m} \frac{G(\lambda_n)}{Y_n(\lambda_n)}$$

という関係から有限の値を求めることができる。

式 (4-31) において

$$G \equiv \int_0^L \frac{d}{dx} (X_n X_m' - X_m X_n') dx, \quad Y \equiv \beta_n^2 - \beta_m^2$$

とおけば,

$$\frac{dG}{d\beta_n} = \int_0^L \frac{\partial}{\partial \beta_n \partial x} \left[ \left\{ X_n(\beta_n, x) \frac{dX_m(\beta_m, x)}{dx} - X_m(x) \frac{dX_n(\beta_n, x)}{dx} \right\} \right] dx = \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_m}{\partial x} - X_m \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

$$\frac{dY}{d\lambda_n} = 2\beta_n$$

分子と分母の極限値の微分はそれぞれ有限な値をとる。

$$\frac{\lim_{n \rightarrow m} \frac{dG}{d\beta_n}}{\lim_{n \rightarrow m} \frac{dY}{d\beta_n}} = \lim_{n \rightarrow m} \frac{G(\lambda_n)}{Y_n(\lambda_n)} = \frac{1}{2\beta} \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

したがって  $n = m$  のとき式 (4-29) は

$$N \equiv \int_0^L X_n^2(x) dx = \frac{1}{2\beta_n} \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx \quad (4-32)$$

$$N(\beta_m) = \int_0^L X_n^2(x) dx \quad (4-32a)$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2\beta_n} \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx \quad (4-32b)$$

以上をまとめると,

$$\int_0^L X(\beta_m, x) X(\beta_n, x) dx = \begin{cases} 0 & \text{in } m \neq n \\ N(\beta_m) & \text{in } m = n \end{cases} \quad (4-33)$$

したがって、熱伝導方程式 (4-1) の一般解は

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X(\beta_m, x) e^{-\alpha \beta_m^2 t} \quad (4-34)$$

で与えられる.

ここで、時間  $t$  について、区間を定義しておく.

即ち、冷却曲線を経過時間  $t$  について、 $t$  は区間  $\tau_i$ , ( $i = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) の集まりとする.

すると式 (4-34) は

$$T(x,t) - T_{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X(\beta_m, x) \exp(-\alpha \beta_m^2 \tau_i) \quad (4-35)$$

ここでの、初期条件は  $i$  番目の  $\tau_i$  について、 $\tau_i = 0$  であるから

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X(\beta_m, x) \quad \text{in } 0 < x < L \quad (4-36)$$

となる.

つぎに、係数  $c_n$  を決めることにする. 式 (4-36) の両辺に、 $X(\beta_n, x)$  を乗じて積分す

ると、直交条件式 (4-33) から

$$\begin{aligned} \int_0^L F(x) X(\beta_n, x) dx &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^L c_m X(\beta_m, x) X(\beta_n, x) dx \\ &= c_n N(\beta_n) \end{aligned} \quad (4-37)$$

すなわち、

$$c_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^L X(\beta_m, x) F(x) dx \quad (4-38)$$

ただし

$$N(\beta_m) = \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2 dx \quad (4-39)$$

を得る. この係数を式 (4-35) に用いると、結局求める温度は、 $t > 0$  に対して次のようになる.

$$T(x, \tau) - T_\infty = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\alpha \beta_m^2 \tau) \frac{1}{N(\beta_m)} X(\beta_m, x) \int_0^L X(\beta_m, x) F(x) dx \quad (4-40)$$

$T(x, \tau) - T_\infty$  は  $\tau \rightarrow 0$  のとき, 初期温度  $F(x)$  になるから

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_m)} X(\beta_m, x) \int_0^L X(\beta_m, x') F(x') dx' \quad \text{in } 0 < x < L \quad (4-41)$$

これは, 任意の関数  $F(x)$  が式 (4-25) の固有関数  $X(\beta_n, x)$  によって表現できることを表している.

つぎに, 具体的にノルム  $N(\beta_m)$  を決める. 式 (4-8) の一般解 (固有関数),

式 (4-25) は

$$X(\beta_m, x) = \beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x$$

で与えられるが, これを境界条件式 (4-12b) に適用し, 式 (4-23) より,

$$\tan \beta_m L = \frac{\beta_m (H_1 + H_2)}{\beta_m^2 - H_1 H_2} \quad (4-42)$$

となる.

ノルムは, 式 (4-42) から

$$N \equiv \int_0^L X_n^2(x) dx = \frac{1}{2\beta_n} \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

$$N(\beta_m) = \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2 dx$$

$$N(\beta_m) = \int_0^L (\beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x)^2 dx$$

$$N(\beta_m) = \int_0^L (\beta_m^2 \cos^2 \beta_m x + 2\beta_m H_1 \cos \beta_m x \sin \beta_m x + H_1^2 \sin^2 \beta_m x) dx$$

$$N(\beta_m) = \int_0^L \left\{ \beta_m^2 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta_m x) + 2\beta_m H_1 \frac{1}{2} (\sin 2\beta_m x) + H_1^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\beta_m x) \right\} dx$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \beta_m^2 \int_0^L (1 + \cos 2\beta_m x) dx + \beta_m H_1 \int_0^L (\sin 2\beta_m x) dx + \frac{1}{2} H_1^2 \int_0^L (1 - \cos 2\beta_m x) dx$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \beta_m^2 \left[ x + \frac{1}{2\beta_m} \sin 2\beta_m x \right]_0^L - \beta_m H_1 \left[ \frac{1}{2\beta_m} \cos 2\beta_m x \right]_0^L$$

$$+ \frac{1}{2} H_1^2 \left[ x - \frac{1}{2\beta_m} \sin 2\beta_m x \right]_0^L$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \beta_m^2 (L + \frac{1}{2\beta_m} \sin 2\beta_m L) - \beta_m H_1 (\frac{1}{2\beta_m} \cos 2\beta_m L - \frac{1}{2\beta_m})$$

$$+ \frac{1}{2} H_1^2 (L - \frac{1}{2\beta_m} \sin 2\beta_m L)$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \beta_m^2 L + \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1^2 L + \frac{\beta_m}{4} \sin 2\beta_m L - \frac{1}{2} H_1 \cos 2\beta_m L - \frac{1}{4\beta_m} H_1^2 \sin 2\beta_m L$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \beta_m^2 L + \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1^2 L + \left( \frac{\beta_m}{4} - \frac{1}{4\beta_m} H_1^2 \right) \sin 2\beta_m L - \frac{1}{2} H_1 \cos 2\beta_m L$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \beta_m^2 L + \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1^2 L + \left( \frac{\beta_m}{4} - \frac{1}{4\beta_m} H_1^2 \right) \sin 2\beta_m L - \frac{1}{2} H_1 \cos 2\beta_m L$$

なお、2倍角の公式が、 $\sin 2\beta_m L = \frac{2 \tan \beta_m L}{1 + \tan^2 \beta_m L}$  と、 $\cos 2\beta_m L = \frac{1 - \tan^2 \beta_m L}{1 + \tan^2 \beta_m L}$  であるから、

$$\begin{aligned}
 N(\beta_m) &= \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \beta_m^2 L + \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1^2 L + \left( \frac{\beta_m}{4} - \frac{1}{4\beta_m} H_1^2 \right) \frac{2 \tan \beta_m L}{1 + \tan^2 \beta_m L} - \frac{1}{2} H_1 \frac{1 - \tan^2 \beta_m L}{1 + \tan^2 \beta_m L} \\
 &= \frac{1}{2} \beta_m^2 L + \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1^2 L + \frac{\frac{\beta_m^2 - H_1^2}{4\beta_m} 2 \tan \beta_m L - \frac{H_1}{2} (1 - \tan^2 \beta_m L)}{1 + \tan^2 \beta_m L} \\
 &= \frac{1}{2} \beta_m^2 L + \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1^2 L + \frac{\frac{\beta_m^2 - H_1^2}{4\beta_m} 2 \tan \beta_m L - \frac{H_1}{2} (1 - \tan^2 \beta_m L)}{1 + \tan^2 \beta_m L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(\beta_m) &= \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \beta_m^2 L + \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_1^2 L + \frac{\frac{\beta_m^2 - H_1^2}{2\beta_m} \tan \beta_m L - \frac{H_1}{2} (1 - \tan^2 \beta_m L)}{1 + \tan^2 \beta_m L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(\beta_m) &= \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \beta_m^2 L + H_1 + H_1^2 L + \frac{1}{\beta_m} (\beta_m^2 - H_1^2) \frac{\tan \beta_m L - H_1 (1 - \tan^2 \beta_m L)}{1 + \tan^2 \beta_m L} \right] \quad (4-43)
 \end{aligned}$$

$\tan \beta_m L$  に対して固有値 (4-42),

$$\tan \beta_m L = \frac{\beta_m (H_1 + H_2)}{\beta_m^2 - H_1 H_2}$$

を代入すると

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(\beta_m^2 - H_1^2)\beta_m(H_1 + H_2)(\beta_m^2 - H_1 H_2) + H_1\beta_m(\beta_m^2(H_1 + H_2)^2 - (\beta_m^2 - H_1 H_2)^2)}{2\beta_m(\beta_m^2 - H_1 H_2)^2}$$

$$+ \frac{(\beta_m^2 - H_1 H_2)^2 + \beta_m^2(H_1 + H_2)^2}{(\beta_m^2 - H_1 H_2)^2}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(\beta_m^2 - H_1^2)\beta_m(H_1 + H_2)(\beta_m^2 - H_1 H_2) + H_1\beta_m(\beta_m^2(H_1 + H_2)^2 - (\beta_m^2 - H_1 H_2)^2)}{2\beta_m(\beta_m^2 - H_1 H_2)^2}$$

$$+ \frac{(\beta_m^2 - H_1 H_2)^2 + \beta_m^2(H_1 + H_2)^2}{(\beta_m^2 - H_1 H_2)^2}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(\beta_m^2 - H_1^2)\beta_m(H_1 + H_2)(\beta_m^2 - H_1 H_2) + H_1\beta_m(\beta_m^2(H_1 + H_2)^2 - (\beta_m^2 - H_1 H_2)^2)}{2\beta_m\{\beta_m^2(H_1 + H_2)^2 + (\beta_m^2 - H_1 H_2)^2\}}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(\beta_m^2 - H_1^2)\beta_m(H_1 + H_2)(\beta_m^2 - H_1 H_2) + H_1\beta_m^3(H_1 + H_2)^2 - H_1\beta_m(\beta_m^2 - H_1 H_2)^2}{2\beta_m\{\beta_m^2(H_1 + H_2)^2 + (\beta_m^2 - H_1 H_2)^2\}}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{\{(\beta_m^2 - H_1^2)\beta_m(H_1 + H_2) - H_1\beta_m(\beta_m^2 - H_1 H_2)\}(\beta_m^2 - H_1 H_2) + H_1\beta_m^3(H_1 + H_2)^2}{2\beta_m\{\beta_m^2(H_1 + H_2)^2 + (\beta_m^2 - H_1 H_2)^2\}}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(\beta_m^3 H_1 - H_1^3 \beta_m + H_2 \beta_m^3 - H_1^2 H_2 \beta_m - H_1 \beta_m^3 + H_1^2 H_2 \beta_m)(\beta_m^2 - H_1 H_2) + H_1 \beta_m^3 (H_1 + H_2)^2}{2\beta_m \{ \beta_m^2 (H_1 + H_2)^2 + (\beta_m^2 - H_1 H_2)^2 \}}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(-H_1^3 \beta_m + H_2 \beta_m^3)(\beta_m^2 - H_1 H_2) + H_1 \beta_m^3 (H_1 + H_2)^2}{2\beta_m \{ \beta_m^2 (H_1^2 + 2H_1 H_2 + H_2^2) + (\beta_m^4 - 2\beta_m^2 H_1 H_2 + H_1^2 H_2^2) \}}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(-H_1^3 \beta_m^3 + H_2 H_1^4 \beta_m + H_2 \beta_m^5 - H_1 H_2^2 \beta_m^3) + H_1 \beta_m^3 (H_1 + H_2)^2}{2\beta_m (\beta_m^2 H_1^2 + 2\beta_m^2 H_1 H_2 + \beta_m^2 H_2^2 + \beta_m^4 - 2\beta_m^2 H_1 H_2 + H_1^2 H_2^2)}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L$$

$$+ \frac{(-H_1^3 \beta_m^3 + H_2 H_1^4 \beta_m + H_2 \beta_m^5 - H_1 H_2^2 \beta_m^3) + (\beta_m^3 H_1^3 + 2H_1^2 H_2 \beta_m^3 + H_1 H_2^2 \beta_m^3)}{2\beta_m \{ \beta_m^2 H_1^2 + \beta_m^2 H_2^2 + \beta_m^4 + H_1^2 H_2^2 \}}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L + \frac{(H_2 H_1^4 \beta_m + H_2 \beta_m^5 + 2H_1^2 H_2 \beta_m^3)}{2\beta_m (\beta_m^2 + H_1^2)(\beta_m^2 + H_2^2)}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}\beta_m^2 L + \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{2}H_1^2 L + \frac{H_2 \beta_m (H_1^4 + \beta_m^4 + 2H_1^2 \beta_m^2)}{2\beta_m (\beta_m^2 + H_1^2)(\beta_m^2 + H_2^2)}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}L(H_1^2 + \beta_m^2) + \frac{1}{2}H_1 + \frac{H_2 (H_1^2 + \beta_m^2)^2}{2(\beta_m^2 + H_1^2)(\beta_m^2 + H_2^2)}$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2}L(H_1^2 + \beta_m^2) + \frac{H_2(H_1^2 + \beta_m^2)}{2(\beta_m^2 + H_2^2)} + \frac{1}{2}H_1$$

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \left[ (H_1^2 + \beta_m^2) \left\{ L + \frac{H_2}{(\beta_m^2 + H_2^2)} \right\} + H_1 \right]$$

すなわち式 (4-32a) から求めるノルムは

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \left[ (\beta_m^2 + H_1^2) \left( L + \frac{H_2}{\beta_m^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right] \quad (4-44)$$

であった。

確認のため、式 (4-32b) からノルムを求める。

式 (4-32) は

$$N(\beta_n) = \int_0^l X_n^2 dx = \frac{1}{2\beta} \int_0^l \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

式 (4-32b) は

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2\beta} \int_0^l \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

であった。

こみいった (too soerature) 計算過程を経て導出した式 (4-44) であるが、式 (4-32) とその過程が正しければ右辺の項を用いても同じ結果になるはずである。

式 (4-25) は

$$X(\beta_n, x) = \beta_n \cos \beta_n x + H_1 \sin \beta_n x$$

であった。

式 (4-32b) にしたがって微分していくとまず

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} = (H_1 x + 1) \cos \beta_n x - \beta_n x \sin \beta_n x$$



$$\frac{\partial X_n}{\partial x} = H_1 \beta_n \cos \beta_n x - \beta_n^2 \sin \beta_n x$$

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = (H_1 - \beta_n^2 x) \cos \beta_n x - \beta_n (H_1 x + 2) \sin \beta_n x$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} = \{(H_1 x + 1) \cos \beta_n x - \beta_n x \sin \beta_n x\} (H_1 \beta_n \cos \beta_n x - \beta_n^2 \sin \beta_n x)$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x}$$

$$= H_1 \beta_n (H_1 x + 1) \cos^2 \beta_n x + \beta_n^3 x \sin^2 \beta_n x - \beta_n^2 (H_1 x + 1) \cos \beta_n x \sin \beta_n x - H_1 \beta_n^2 x \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} = H_1 \beta_n (H_1 x + 1) \cos^2 \beta_n x + \beta_n^3 x \sin^2 \beta_n x - \beta_n^2 (2H_1 x + 1) \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = (\beta_n \cos \beta_n x + H_1 \sin \beta_n x) \{(H_1 - \beta_n^2 x) \cos \beta_n x - \beta_n (H_1 x + 2) \sin \beta_n x\}$$

$$X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = \beta_n (H_1 - \beta_n^2 x) \cos^2 \beta_n x - H_1 \beta_n (H_1 x + 2) \sin^2 \beta_n x + (H_1^2 - 2H_1 \beta_n^2 x - 2\beta_n^2) \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$\therefore \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = \{H_1 \beta_n (H_1 x + 1) \cos^2 \beta_n x + \beta_n^3 x \sin^2 \beta_n x - \beta_n^2 (2H_1 x + 1) \cos \beta_n x \sin \beta_n x\}$$

$$- \{\beta_n (H_1 - \beta_n^2 x) \cos^2 \beta_n x - H_1 \beta_n (H_1 x + 2) \sin^2 \beta_n x + (H_1^2 - 2H_1 \beta_n^2 x - 2\beta_n^2) \cos \beta_n x \sin \beta_n x\}$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = \{H_1 \beta_n (H_1 x + 1) \cos^2 \beta_n x + \beta_n^3 x \sin^2 \beta_n x - \beta_n^2 (2H_1 x + 1) \cos \beta_n x \sin \beta_n x\}$$

$$- \{\beta_n (H_1 - \beta_n^2 x) \cos^2 \beta_n x - H_1 \beta_n (H_1 x + 2) \sin^2 \beta_n x + (H_1^2 - 2H_1 \beta_n^2 x - 2\beta_n^2) \cos \beta_n x \sin \beta_n x\}$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = \{H_1 \beta_n (H_1 x + 1) - \beta_n (H_1 - \beta_n^2 x)\} \cos^2 \beta_n x + \{\beta_n^3 + H_1 \beta_n (H_1 x + 2)\} \sin^2 \beta_n x$$

$$+ \{-\beta_n^2 (2H_1 x + 1) - (H_1^2 - 2H_1 \beta_n^2 x - 2\beta_n^2)\} \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = \{H_1^2 \beta_n x + H_1 \beta_n - \beta_n H_1 + \beta_n^3 x\} \cos^2 \beta_n x + \{\beta_n^3 + H_1 \beta_n (H_1 x + 2)\} \sin^2 \beta_n x$$

$$+ \{-\beta_n^2 2H_1 x - \beta_n^2 - H_1^2 + 2H_1 \beta_n^2 x + 2\beta_n^2\} \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x}$$

$$= \{H_1^2 \beta_n x + \beta_n^3 x\} \cos^2 \beta_n x + \{\beta_n^3 + H_1^2 \beta_n x + 2H_1 \beta_n\} \sin^2 \beta_n x - (H_1^2 - \beta_n^2) \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = H_1^2 \beta_n x (\cos^2 \beta_n x + \sin^2 \beta_n x)$$

$$+ \beta_n^3 x (\cos^2 \beta_n x + \sin^2 \beta_n x) + 2H_1 \beta_n \sin^2 \beta_n x - (H_1^2 - \beta_n^2) \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} = H_1^2 \beta_n x + \beta_n^3 x + 2H_1 \beta_n \sin^2 \beta_n x - (H_1^2 - \beta_n^2) \cos \beta_n x \sin \beta_n x$$

$$N(\beta_n) = H_1^2 \beta_n x + \beta_n^3 x + 2H_1 \beta_n \frac{-\cos 2\beta_n x + 1}{2} - (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{\sin 2\beta_n x}{2}$$

$$N(\beta_n) = H_1^2 \beta_n x + \beta_n^3 x + H_1 \beta_n (-\cos 2\beta_n x + 1) - (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{\sin 2\beta_n x}{2}$$

$$N(\beta_n) = H_1 \beta_n + H_1^2 \beta_n x + \beta_n^3 x - H_1 \beta_n \cos 2\beta_n x - (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{\sin 2\beta_n x}{2}$$

$$\therefore N(\beta_n) = \frac{1}{2\beta_n} \int_0^l \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\beta_n} \left[ H_1 \beta_n + H_1^2 \beta_n x + \beta_n^3 x - H_1 \beta_n \cos 2\beta_n x - (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{\sin 2\beta_n x}{2} \right]_0^l dx$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2\beta_n} \int_0^l \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\beta_n} \left[ \left\{ H_1 \beta_n + H_1^2 \beta_n L + \beta_n^3 L - H_1 \beta_n \cos 2\beta_n L - \frac{1}{2} (H_1^2 - \beta_n^2) \sin(2\beta_n L) \right\} - (H_1 \beta_n - H_1 \beta_n) \right]$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2\beta_n} \left\{ H_1^2 \beta_n L + \beta_n^3 L - H_1 \beta_n \cos 2\beta_n L - \frac{1}{2} (H_1^2 - \beta_n^2) \sin(2\beta_n L) \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + \beta_n^2 L - H_1 \cos 2\beta_n L - \frac{1}{2\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \sin(2\beta_n L) \right\}$$

なお, 2倍角の公式が,  $\sin 2\beta_m L = \frac{2 \tan \beta_m L}{1 + \tan^2 \beta_m L}$  と,  $\cos 2\beta_m L = \frac{1 - \tan^2 \beta_m L}{1 + \tan^2 \beta_m L}$  であるから,

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + \beta_n^2 L - H_1 \cos 2\beta_n L - \frac{1}{2\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \sin(2\beta_n L) \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + \beta_n^2 L - H_1 \left( \frac{1 - \tan^2 \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right) - \frac{1}{2\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{2 \tan \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + \beta_n^2 L - H_1 \left( \frac{1 - \tan^2 \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right) - \frac{1}{\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{\tan \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + \beta_n^2 L - H_1 \left( \frac{1 - \tan^2 \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right) - \frac{1}{\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{\tan \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + H_1 + \beta_n^2 L - H_1 \left( \frac{1 - \tan^2 \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right) - \frac{1}{\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \frac{\tan \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + H_1 + \beta_n^2 L - \frac{H_1 (1 - \tan^2 \beta_n L) + \frac{1}{\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \tan \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + H_1 + \beta_n^2 L - \frac{H_1 - H_1 \tan^2 \beta_n L + \frac{1}{\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \tan \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ H_1^2 L + H_1 + \beta_n^2 L - \frac{H_1 (1 - \tan^2 \beta_n L) + \frac{1}{\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \tan \beta_n L}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left\{ \beta_n^2 L + H_1 + H_1^2 L - \frac{\frac{1}{\beta_n} (H_1^2 - \beta_n^2) \tan \beta_n L + H_1 (1 - \tan^2 \beta_n L)}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore N(\beta_n) &= \frac{1}{2\beta} \int_0^l \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \beta_n^2 L + H_1 + H_1^2 L + \frac{1}{\beta_n} \frac{(\beta_n^2 - H_1^2) \tan \beta_n L - H_1 (1 - \tan^2 \beta_n L)}{1 + \tan^2 \beta_n L} \right\} \quad (4-45) \end{aligned}$$

式 (4-45) は

式 (4-43) に一致した.

すなわちノルム  $N(\beta_m)$  の式 (4-32)

$$N(\beta_m) \equiv \int_0^L X_n^2(x) dx = \frac{1}{2\beta_n} \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

式 (4-32a) は 
$$N(\beta_m) = \int_0^L X_n^2(x) dx$$

式 (4-32b) は 
$$N(\beta_m) = \frac{1}{2\beta_n} \int_0^L \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial X_n}{\partial \beta_n} \frac{\partial X_n}{\partial x} - X_n \frac{\partial^2 X_n}{\partial \beta_n \partial x} \right) dx$$

式 (4-32a) から求めた (4-43) は (4-32b) から求めた式 (4-45) に一致することが確認された. 式 (4-32a) は直交関係の内積から直接導かれ, その不定形を解消するためにロピタルの定理から導かれた式 (4-32b) は等価だが式の形は異なる. 算出結果の一致は式 (4-32) とともに算出過程の正しさを確認できたことになる.

なお, 式 (4-43), (4-45) から式 (4-44)

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \left[ (\beta_m^2 + H_1^2) \left( L + \frac{H_2}{\beta_m^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right]$$

がもとまる.

また、式(4-35)中の $\alpha$ は、最初の定義のとおり一般には $k$ と記述される。

すなわち、

$$\alpha = \kappa = \frac{k}{c\rho}$$

ここに

$\kappa$  : 熱拡散率 (Thermal Diffusivity),  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

$k$  : 熱伝導度 (Heat Conductivity),  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  :  $\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$

$c$  : 比熱 (Specific Heat),  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  :  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

$\rho$  : 密度 (Density),  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$h_1, h_2$  : 熱伝達率 (Heat Transfer Coefficients),  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  :  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$

式(4-14)から

$$H_1 \equiv \frac{h_1}{k_1} \quad \text{and} \quad H_2 \equiv \frac{h_2}{k_2}$$

#### 4.4.2 式の無次元化

式 (4-1) は

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{in } 0 < x < L, t > 0$$

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \tag{4-46}$$

$$t^* \equiv \frac{\alpha t}{L^2} \tag{4-47}$$

$$T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \tag{4-48}$$

とすると、式 (4-48) の左辺については次式の関係があり

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial T^*(x,t)} \cdot \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial x}$$

式 (4-48) から

$$T = T^*(T_0 - T_\infty) + T_\infty,$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial T^*(x,t)} = (T_0 - T_\infty) \tag{4-49}$$

式 (4-46) から

$$\frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{(T_0 - T_\infty)}{L} \cdot \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x^*} \tag{4-50}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_0 - T_\infty}{L} \cdot \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x^*} \right) = \frac{(T_0 - T_\infty)}{L} \cdot \frac{\partial^2 T^*(x,t)}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{(T_0 - T_\infty)}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 T^*(x,t)}{\partial x^{*2}}$$

一方式 (4-1) の右辺については次の関係があり

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial T^*(x,t)} \cdot \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial t}$$

(4-47) から

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{\alpha}{L^2}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial t^*} \cdot \frac{\alpha}{L^2} (T_0 - T_\infty) = \frac{(T_0 - T_\infty)}{L^2} \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial t^*}$$

結局式 (4-1) は無次元化により次のように表すことができる。

$$\therefore \frac{\partial^2 T^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial T^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad \text{in } 0 \leq x^* \leq 1, \quad 0 \leq t^* \quad (4-51)$$

初期条件は

$$T^*(x^*, t^*) = F(x^*) \quad \text{when } t^* = 0, \quad \text{in } 0 \leq x^* \leq 1 \quad (4-52)$$

$hL/k$  は無次元 (Biot Number) で境界条件は

$$-\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_1 L}{k_1} T^* = 0 \quad \text{at } x^* = 0, \quad t^* > 0 \quad (4-53a)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_2 L}{k_2} T^* = 0 \quad \text{at } x^* = 1, \quad t^* > 0 \quad (4-53b)$$

と書くことができる。

これを解くために、位置  $x^*$  と時間  $t^*$  の関数である  $T^*(x^*, t^*)$  を

$$T^*(x^*, t^*) = X^*(x^*) \Gamma^*(t^*) \quad (4-54)$$

のように変数分離すると式 (4-51) は

まず、位置  $x^*$  について微分すると

$$\frac{\partial T^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} = \frac{dX^*(x^*)}{dx^*} \Gamma^*(t^*) \quad (4-55)$$

二次微分は

$$\frac{\partial^2 T^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} = \frac{d^2 X^*(x^*)}{dx^{*2}} \Gamma^*(t^*) \quad (4-56)$$

一方、時間  $t^*$  についての偏微分は

$$\frac{\partial T^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} = \frac{d^* \Gamma(t^*)}{dt^*} X^*(x^*) \quad (4-57)$$

式 (4-56), (4-57) を式 (4-51) に入れて  $x^*$  と  $t^*$  を両辺に分けると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X^*(x^*)}{dx^{*2}} \Gamma^*(t^*) &= \frac{d^* \Gamma(t^*)}{dt^*} X^*(x^*) \\ \therefore \frac{d^2 X^*(x^*)}{dx^{*2}} \frac{1}{X^*(x^*)} &= \frac{d^* \Gamma(t^*)}{dt^*} \frac{1}{\Gamma^*(t^*)} \end{aligned}$$

これを

$$\frac{d^2 X^*}{dx^{*2}} \frac{1}{X^*} = \frac{d^* \Gamma}{dt^*} \frac{1}{\Gamma^*} \quad (4-58)$$

$$\frac{d^2 X^*}{dx^{*2}} \frac{1}{X^*} = \frac{d^* \Gamma}{dt^*} \frac{1}{\Gamma^*} \equiv -\beta^{*2} \quad (4-59)$$

とおく.

これから2個の常微分方程式

$$\frac{d^* \Gamma}{dt^*} + \beta^{*2} \Gamma^* = 0 \quad (4-60)$$

$$\frac{d^2 X^*}{dx^{*2}} + X^* \beta^{*2} = 0 \quad (4-61)$$

が成り立つ.

式 (4-60) の一般解は

$$\Gamma^*(t^*) = C^* \cdot e^{-\beta^{*2} t^*} \quad (4-62)$$

式 (4-59) の右辺を負としたのは式 (4-62) から  $\Gamma^*(t^*)$  は  $t^*$  とともに減衰するという

物理的事実に合致させるためである.



一方, 式 (4-61) の一般解は,  $A^*, B^*$  を積分定数として

$$X^* = A^* \cos \beta^* x^* + B^* \sin \beta^* x^* \quad (4-63)$$

$$\frac{dX^*}{dx^*} = \beta^* (-A^* \sin \beta^* x^* + B^* \cos \beta^* x^*) \quad (4-64)$$

である.

ここで, 式 (4-63) について, 境界条件を用いて係数  $A^*, B^*$  の関係を求める

$x^* = 0$  における境界条件式 (4-53a) に式 (4-54), (4-55) を代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_1 L}{k_1} T^* &= -\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} \Gamma^*(t^*) + \frac{h_1 L}{k_1} X^*(x^*) \Gamma^*(t^*) = 0 \\ -\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_1 L}{k_1} T^* &= \Gamma^*(t^*) \left\{ -\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_1 L}{k_1} X^*(x^*) \right\} = 0 \end{aligned}$$

このとき

$$\Gamma^*(t^*) \neq 0$$

であるから

$$-\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_1 L}{k_1} X^*(x^*) = 0 \quad (4-65a)$$

また,  $x^* = 1$  における境界条件式 (4-53b) に式 (4-54), (4-55) を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_2 L}{k_2} T^* &= \frac{dX^*(x^*)}{dx^*} \Gamma^*(t^*) + \frac{h_2 L}{k_2} X^*(x^*) \Gamma^*(t^*) = 0 \\ \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_2 L}{k_2} T^* &= \Gamma^*(t^*) \left\{ \frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_2 L}{k_2} X^*(x^*) \right\} = 0 \end{aligned}$$

このとき

$$\Gamma^*(t^*) \neq 0$$

であるから

$$\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_2 L}{k_2} X^*(x^*) = 0 \quad (4-65b)$$

整理すると境界条件は

$$-\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_1 L}{k_1} X^*(x^*) = 0 \quad \text{at } x^* = 0, \quad t^* > 0 \quad (4-66a)$$

$$\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_2 L}{k_2} X^*(x^*) = 0 \quad \text{at } x^* = 1, \quad t^* > 0 \quad (4-66b)$$

$x^* = 0$  の境界では,  $x^* = 0$  を式 (4-63) と (4-64) に代し

$$\frac{dX^*}{dx^*} = \beta^* B^* \quad , X^* = A^*$$

を得る. これを式 (4-66a) に代入すると

$$-\beta^* B^* + \frac{h_1 L}{k_1} A^* = 0 \quad (4-67)$$

となり, これから係数  $A^*$ ,  $B^*$  について

$$B^* = \frac{h_1 L}{\beta^* k_1} A^*, \quad \frac{B^*}{A^*} = \frac{h_1 L}{\beta^* k_1}, \quad \frac{\beta^* k_1 B^*}{h_1 L} = A^* \quad (4-68)$$

の関係が得られる. これを用いて式 (4-63) から  $B^*$  を消去すると

$$X^* = A^* \cos \beta^* x^* + B^* \sin \beta^* x^* = A^* \left( \cos \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{\beta^* k_1} \sin \beta^* x^* \right)$$

係数  $A^*$  を消去すると

$$X^* = A^* \cos \beta^* x^* + B^* \sin \beta^* x^* = B^* \left( \frac{\beta^* k_1}{h_1 L} \cos \beta^* x^* + \sin \beta^* x^* \right)$$

となる. それぞれを整理すると

$$X^* = \frac{A^*}{\beta^*} \left( \beta^* \cos \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{k_1} \sin \beta^* x^* \right) \quad (4-69)$$

$$X^* = B^* \beta^* \left( \frac{k_1}{h_1 L} \cos \beta^* x^* + \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* x^* \right) \quad (4-70)$$

まず係数  $A^*$  を残す式 (4-69) の微分形は

$$\begin{aligned} \frac{dX^*}{dx} &= \frac{A^*}{\beta^*} \left( -\beta^{*2} \sin \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{k_1} \beta^* \cos \beta^* x^* \right) = A^* \left( -\beta^* \sin \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{k_1} \cos \beta^* x^* \right) \\ \frac{dX^*}{dx} &= A^* \left( -\beta^* \sin \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{k_1} \cos \beta^* x^* \right) \end{aligned} \quad (4-71)$$

境界条件式 (4-66b) に式 (4-71), 式 (4-69) をそれぞれ代入すると

$$A^* \left( -\beta^* \sin \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \cos \beta^* \right) + \frac{h_2 L}{k_2} \frac{A^*}{\beta^*} \left( \beta^* \cos \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \sin \beta^* \right) = 0 \quad \text{at } x^* = 1$$

を得る.  $A^*$  は消去できて

$$\left( -\beta^* \sin \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \cos \beta^* \right) + \frac{h_2 L}{k_2 \beta^*} \left( \beta^* \cos \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \sin \beta^* \right) = 0 \quad (4-72)$$

展開し整理すると

$$\begin{aligned} -\beta^* \sin \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \cos \beta^* + \frac{h_2 L}{k_2} \cos \beta^* + \frac{h_2 L}{k_2} \frac{h_1 L}{k_1 \beta^*} \sin \beta^* &= 0 \\ \left( \frac{h_2 L}{k_2} + \frac{h_1 L}{k_1} \right) \cos \beta^* + \left( \frac{h_1 h_2 L^2}{\beta^* k_2 k_1} - \beta^* \right) \sin \beta^* &= 0 \\ \left( \frac{h_1 L}{k_1} + \frac{h_2 L}{k_2} \right) \cos \beta^* &= \left( \beta^* - \frac{h_1 h_2 L^2}{\beta^* k_1 k_2} \right) \sin \beta^* \\ \tan \beta^* &= \frac{\left( \frac{h_1 L}{k_1} + \frac{h_2 L}{k_2} \right)}{\left( \beta^* - \frac{h_1 h_2 L^2}{\beta^* k_1 k_2} \right)} = \frac{L \beta^* \left( \frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} \right)}{\beta^{*2} - \frac{h_1 h_2}{k_1 k_2} L^2} \end{aligned}$$

$$\tan \beta^* = \frac{\beta^* L (H_1 + H_2)}{\beta^{*2} - H_1 H_2 L^2} \quad (4-73)$$

式 (4-14) から

$$H_1 \equiv \frac{h_1}{k_1}, \quad H_2 \equiv \frac{h_2}{k_2}$$

とおいた.

なお,  $H_1 = H_2 = H$  の場合, 式 (4-73) は

$$\tan \beta^* = \frac{2L\beta^* H}{\beta^{*2} - H^2 L^2} \quad (4-74)$$

となる. 次に係数  $B^*$  を用いる式 (4-70) は

$$X^* = B^* \beta^* \left( \frac{k_1}{h_1 L} \cos \beta^* x^* + \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* x^* \right)$$

微分形は

$$\frac{dX^*}{dx} = B^* \beta^* \left( -\frac{k_1 \beta^*}{h_1 L} \sin \beta^* x^* + \cos \beta^* x^* \right)$$

境界条件 (12b-1) では,  $x^* = 1$  において

$$B^* \beta^* \left( -\frac{k_1 \beta^*}{h_1 L} \sin \beta^* + \cos \beta^* \right) + \frac{h_2 L}{k_2} B^* \beta^* \left( \frac{k_1}{h_1 L} \cos \beta^* + \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* \right) = 0$$

$B^* \beta^*$  を消去すると

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{k_1\beta^*}{h_1L} \sin \beta^* + \cos \beta^* \right) + \frac{h_2L}{k_2} \left( \frac{k_1}{h_1L} \cos \beta^* + \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* \right) = 0 \\
 & -\frac{k_1\beta^*}{h_1L} \sin \beta^* + \cos \beta^* + \frac{h_2L}{k_2} \frac{k_1}{h_1L} \cos \beta^* + \frac{h_2L}{k_2} \frac{1}{\beta^*} \sin \beta^* = 0 \\
 & -\frac{k_1\beta^*}{h_1L} \sin \beta^* + \cos \beta^* + \frac{h_2k_1}{k_2h_1} \cos \beta^* + \frac{h_2L}{k_2\beta^*} \sin \beta^* = 0 \\
 & \left( 1 + \frac{h_2k_1}{k_2h_1} \right) \cos \beta^* + \left( \frac{h_2L}{k_2\beta^*} - \frac{k_1\beta^*}{h_1L} \right) \sin \beta^* = 0 \\
 & \left( 1 + \frac{h_2k_1}{h_1k_2} \right) \cos \beta^* + \left( \frac{h_1h_2L^2 - k_1k_2\beta^{*2}}{h_1k_2\beta^*L} \right) \sin \beta^* = 0 \\
 & \cos \beta^* = \left( \frac{k_1k_2\beta^{*2} - h_1h_2L^2}{h_1k_2\beta^*L} \right) \sin \beta^* \\
 & \frac{\sin \beta^*}{\cos \beta^*} = \left( \frac{h_1k_2\beta^*L}{k_1k_2\beta^{*2} - h_1h_2L^2} \right) \left( \frac{h_1k_2 + h_2k_1}{h_1k_2} \right) \\
 & \frac{\sin \beta^*}{\cos \beta^*} = \frac{\beta^*L(h_1k_2 + h_2k_1)}{k_1k_2\beta^{*2} - h_1h_2L^2} = \frac{\beta^*L(h_1k_2 + h_2k_1)}{k_1k_2\beta^{*2} - h_1h_2L^2}
 \end{aligned}$$

右辺分子・分母に  $\frac{1}{k_2k_1}$  を乗じると

$$\tan \beta^* = \frac{\beta^*L(H_1 + H_2)}{\beta^{*2} - H_1H_2L^2}$$

即ち (4-73) が導かれる。

一般解に係数  $A^*$  を用いる式 (4-69) および  $B^*$  を用いる式 (4-70) とも式 (4-73) が得られる。

いま, 式 (4-69), (4-70) の右辺第一項の係数を  $\frac{A^*}{\beta^*} = \frac{k_1B^*}{h_1L} \equiv 1$  とし正規化すると,

(4-69), (4-70) は

$$X^* = \beta^* \cos \beta^* x^* + \frac{h_1L}{k_1} \sin \beta^* x^*$$

$$\frac{dX^*}{dx} = -\beta^{*2} \sin \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{k_1} \beta^* \cos \beta^* x^*$$

境界条件式 (4-66a) は

$$\left( -\beta^{*2} \sin \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{k_1} \beta^* \cos \beta^* x^* \right) + \frac{h_2 L}{k_2} \left( \beta^* \cos \beta^* x^* + \frac{h_1 L}{k_1} \sin \beta^* x^* \right) = 0$$

$x^* = 1$  において

$$\begin{aligned} -\beta^{*2} \sin \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \beta^* \cos \beta^* + \frac{h_2 L}{k_2} \left( \beta^* \cos \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \sin \beta^* \right) &= 0 \\ -\beta^{*2} \sin \beta^* + \frac{h_1 L}{k_1} \beta^* \cos \beta^* + \frac{h_2 L}{k_2} \beta^* \cos \beta^* + \frac{h_2 L}{k_2} \frac{h_1 L}{k_1} \sin \beta^* &= 0 \\ \left( \frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} \right) L \beta^* \cos \beta^* + \left( \frac{h_1 h_2 L^2}{k_1 k_2} - \beta^{*2} \right) \sin \beta^* &= 0 \\ \left( \frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} \right) L \beta^* \cos \beta^* &= \left( \beta^{*2} - \frac{h_1 h_2 L^2}{k_1 k_2} \right) \sin \beta^* \end{aligned}$$

$$\frac{\sin \beta^*}{\cos \beta^*} = \frac{L \beta^* \left( \frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} \right)}{\beta^{*2} - \frac{h_1 h_2 L^2}{k_1 k_2}}$$

$$\tan \beta^* = \frac{\beta^* L (H_1 + H_2)}{\beta^{*2} - H_1 H_2 L^2}$$

即ち式 (4-73) が導かれる。

整理すると

位置  $x^*$  についての方程式 (4-61) は

$$\frac{d^2 X^*}{dx^{*2}} + X^* \beta^{*2} = 0 \quad \text{in } 0 < x^* < 1$$

その固有関数  $X^*(\beta^*, x^*)$  は

$$X^*(\beta^*, x^*) = \beta^* \cos \beta^* x^* + H_1 L \sin \beta^* x^*$$

これから得られる固有値  $\beta_m^*$  は収束するが、理論上  $\infty$  に存在する。

そこであらためて式 (4-73) は

$$\tan \beta_m^* = \frac{\beta_m^* L (H_1 + H_2)}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2} \quad (4-75)$$

固有関数は

$$X^*(\beta_m^*, x^*) = \beta_m^* \cos \beta_m^* x^* + H_1 L \sin \beta_m^* x^* \quad (4-76)$$

これらを集めて和した

$$X^*(\beta_m^*, x^*) = \sum_{m=1}^n \beta_m^* \cos \beta_m^* x^* + H_1 L \sin \beta_m^* x^* \quad (4-77)$$

も方程式 (4-61) の解で固有関数である。

境界条件式 (4-66a), (4-66b) は

$$-\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_1 L}{k_1} X^*(x^*) = 0 \quad \text{at } x^* = 0, \quad t^* > 0$$

$$\frac{dX^*(x^*)}{dx^*} + \frac{h_2 L}{k_2} X^*(x^*) = 0 \quad \text{at } x^* = 1, \quad t^* > 0$$

である。いま,

$$Z \equiv \frac{d}{dx^*} \frac{dX^*(\beta^*, x^*)}{dx^*} = \frac{d}{dx^*} (\dot{X})$$

とにおいて式 (4-66a), (4-66b) は

$$\frac{d}{dx^*} \frac{dX_n^*(\beta_n^*, x^*)}{dx^*} + \beta_n^{*2} X_n^*(x^*) = 0 \quad \dots\dots Z_n + \beta_n^{*2} X_n^* = 0 \quad (4-78)$$

$$\frac{d}{dx^*} \frac{dX_m^*(\beta_m^*, x^*)}{dx^*} + \beta_m^{*2} X_m^*(x^*) = 0 \quad \dots\dots Z_m + \beta_m^{*2} X_m^* = 0 \quad (4-79)$$

と簡略化しておく。

(4-79) に  $X_n^*$  を乗じ ( $X_n^* Z_m + \beta_m^{*2} X_n^* X_m^* = 0$ ),

(4-78) に  $X_m^*$  を乗じ ( $X_m^* Z_n + \beta_n^{*2} X_m^* X_n^* = 0$ ) 差をとると,

$$X_n^* Z_m - X_m^* Z_n + (\beta_m^{*2} - \beta_n^{*2}) X_n^* X_m^* = 0$$

$$X_n^* X_m^* = \frac{X_n^* Z_m - X_m^* Z_n}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}}$$

$Z$  を書き直すと

$$X_n^* X_m^* = \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}} \left\{ X_n^* \frac{d}{dx^*} \left( \dot{X}_m^* \right) - X_m^* \frac{d}{dx^*} \left( \dot{X}_n^* \right) \right\}$$

$n$  系,  $m$  系は互いに独立であるから右辺の  $\{ \}$  内を統合して,

$$X_n^* X_m^* = \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}} \left\{ \frac{d}{dx^*} \left( X_n^* \dot{X}_m^* \right) - \frac{d}{dx^*} \left( X_m^* \dot{X}_n^* \right) \right\}$$

両辺を関数の定義範囲で積分する

$$\int_0^1 X_n^* X_m^* dx^* = \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \beta_n^* \dot{X}_m^* - X_m^* \dot{X}_n^* \right) dx^* \quad (4-80)$$

$$\int_0^1 X_n^* X_m^* dx^* = \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}} \left[ X_n^* \dot{X}_m^* - X_m^* \dot{X}_n^* \right]_0^1$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 X_n^* X_m^* dx^* \\ &= \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}} \left\{ X_n^*(1) \dot{X}_m^*(1) - X_m^*(1) \dot{X}_n^*(1) \right\} - \left\{ X_n^*(0) \dot{X}_m^*(0) - X_m^*(0) \dot{X}_n^*(0) \right\} \end{aligned}$$

ここで, 境界条件 (4-66a) より



$$\begin{aligned}
 -k_1 \dot{X}_n^*(0) + \frac{h_1 L}{k_1} L X_n^*(0) &= 0, & \dot{X}_n^*(0) &= \frac{h_1}{k_1} L X_n^*(0) \\
 -k_1 \dot{X}_m^*(0) + \frac{h_1 L}{k_1} X_m^*(0) &= 0, & \dot{X}_m^*(0) &= \frac{h_1}{k_1} L X_m^*(0)
 \end{aligned}$$

境界条件 (4-66b) より,

$$\begin{aligned}
 k_2 \dot{X}_n^*(1) + \frac{h_2 L}{k_2} X_n^*(1) &= 0, & \dot{X}_n^*(1) &= -\frac{h_2}{k_2} L X_n^*(1) \\
 k_2 \dot{X}_m^*(1) + \frac{h_2 L}{k_2} X_m^*(1) &= 0, & \dot{X}_m^*(1) &= -\frac{h_2}{k_2} L X_m^*(1)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 X_n^* X_m^* dx^* = \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}} \left[ \underbrace{-X_n^*(1) \frac{h_2}{k_2} L X_m^*(1) + X_m^*(1) \frac{h_2}{k_2} L X_n^*(1)}_0 + \underbrace{X_n^*(0) \frac{h_1}{k_1} L X_m^*(0) - X_m^*(0) \frac{h_1}{k_1} L X_n^*(0)}_0 \right]$$

すなわち  $m \neq n$  で,

$$\int_0^1 X_n^* X_m^* dx^* = \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( X_n^* \dot{X}_m^* - X_m^* \dot{X}_n^* \right) dx^* = 0 \quad (4-81)$$

$X_n^*$  と  $X_m^*$  は互いに直交関係にあることが確認される。

一方,  $m = n$  では,

$$\int_0^1 X_n^* X_n^* dx^* = \frac{1}{\beta_n^{*2} - \beta_n^{*2}} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( X_n^* \dot{X}_n^* - X_n^* \dot{X}_n^* \right) dx^*$$

右辺の分子, 分母ともに 0 となり不定となる. しかし, ロピタルの定理を用いると  $\lambda_n \rightarrow \lambda_m$  の極限において

$$\frac{\lim_{n \rightarrow m} \frac{dG}{d\beta_n}}{\lim_{n \rightarrow m} \frac{dY}{d\beta_n}} = \lim_{n \rightarrow m} \frac{G(\lambda_n)}{Y(\lambda_n)}$$

という関係から有限の値を求めることができる.

式 (4-81) において

$$G \equiv \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( X_n^* \dot{X}_m^* - X_m^* \dot{X}_n^* \right) dx^*, \quad Y \equiv \beta_n^{*2} - \beta_m^{*2}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\beta_n^*} &= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^* \partial \beta_n^*} \left[ \left\{ X_n^* (\beta_n^*, x^*) \frac{dX_m^* (\beta_m^*, x^*)}{dx^*} - X_m^* (x^*) \frac{dX_n^* (\beta_n^*, x^*)}{dx^*} \right\} \right] dx^* \\ \frac{dG}{d\beta_n^*} &= \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_m^*}{\partial x^*} - X_m^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^* \\ \frac{dY}{d\lambda_n} &= 2\beta_n^* \end{aligned}$$

分子と分母の極限値の微分はそれぞれ有限な値をとる.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow m} \frac{dG}{d\beta_n^*} &= \lim_{n \rightarrow m} \frac{G(\lambda_n)}{Y_n(\lambda_n)} = \frac{1}{2\beta_n^*} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X_n^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^* \\ \lim_{n \rightarrow m} \frac{dY}{d\beta_n^*} & \end{aligned}$$

したがって  $n=m$  のとき (4-81) 式は

$$N^*(\beta_n^*) \equiv \int_0^1 X_n^{*2}(x^*) dx^* = \frac{1}{2\beta_n^*} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X_n^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^* \quad (4-82)$$

式 (4-82) 中央の項は直交関係の内積からもたらされるノルム  $N^*(\beta_n^*)$ , 最右辺の項は

分子/分母の不定を回避するロピタルの定理から導かれるノルム  $N^*(\beta_n^*)$  の式である.

$$N^*(\beta_n^*) = \int_0^1 X_n^{*2}(x^*) dx^* \quad (4-82a)$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2\beta_n^*} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X_n^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^* \quad (4-82b)$$

以上をまとめると,

$$\int_0^1 X^*(\beta_m^*, x^*) X^*(\beta_n^*, x^*) dx = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ N^*(\beta_m) & \text{for } m = n \end{cases} \quad (4-83)$$

熱伝導方程式 (4-51) の一般解は式 (4-54), (4-62) から

$$T^*(x^*, t^*) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* X^*(\beta_m^*, x^*) e^{-\beta_m^{*2} t^*} \quad \text{when } t^* > 0 \quad \text{in } 0 < x^* < 1 \quad (4-84)$$

で与えられる.

$X^*(\beta_m^*, x^*)$  は式 (4-75) で示される固有値をもつ固有関数 (4-76) で与えられる. また,

初期条件 (4-52) は

$$F(x^*) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* X^*(\beta_m^*, x^*) \quad \text{when } t^* = 0 \quad \text{in } 0 < x^* < 1 \quad (4-85)$$

となる.

これを用い, 係数  $c_n$  を決める. 式 (4-85) の両辺に,  $X(\beta_n, x)$  を乗じて積分すると,

直交条件式 (4-83) から

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x^*) X^*(\beta_n^*, x^*) dx^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 c_m^* X^*(\beta_m^*, x^*) X^*(\beta_n^*, x^*) dx^* \\ &= c_n^* N^*(\beta_n^*) \end{aligned} \quad (4-86)$$

すなわち,

$$c_m^* = \frac{1}{N^*(\beta_m^*)} \int_0^1 X^*(\beta_m^*, x^*) F(x^*) dx \quad (4-87)$$

ただし

$$N^*(\beta_m^*) = \int_0^1 [X^*(\beta_m^*, x^*)]^2 dx^* \quad (4-88)$$

を得る. この係数を式 (4-84) に用いると, 結局求める温度は,  $t > 0$  に対して次のようになる.

$$T^*(x^*, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^* t} \frac{1}{N^*(\beta_m^*)} X^*(\beta_m^*, x^*) \int_0^1 X^*(\beta_m^*, x^*) F(x^*) dx^* \quad (4-89)$$

$T$  は  $t \rightarrow 0$  のとき, 初期温度  $F(x^*)$  になるから

$$F(x^*) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N^*(\beta_m^*)} X^*(\beta_m^*, x^*) \int_0^1 X^*(\beta_m^*, x^*) F(x^*) dx^* \quad 0 < x^* < 1 \quad (4-90)$$

これは, 任意の関数  $F(x^*)$  が式 (16) の固有関数  $X(\beta_n^*, x^*)$  によって表現できることを表している.

つぎに, 具体的にノルム  $N(\beta_m^*)$  を決める.

方程式 (4-61) の固有関数 (4-76) と固有値 (4-73) は

$$X^*(\beta_m^*, x^*) = \beta_m^* \cos \beta_m^* x^* + H_1 L \sin \beta_m^* x^*$$

$$\tan \beta_m^* = \beta_m^* L \frac{H_1 + H_2}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2}$$

で表されるから, ノルム  $N(\beta_m^*)$  は式 (4-82a) から,

$$N^*(\beta_m^*) = \int_0^1 [X^*(\beta_m^*, x^*)]^2 dx^* = \int_0^1 (\beta_m^* \cos \beta_m^* x^* + H_1 L \sin \beta_m^* x^*)^2 dx^*$$

$$N^*(\beta_m^*) = \int_0^1 (\beta_m^{*2} \cos^2 \beta_m^* x^* + 2\beta_m^* H_1 L \cos \beta_m^* x^* \sin \beta_m^* x^* + H_1^2 L^2 \sin^2 \beta_m^* x^*) dx^*$$

$$N^*(\beta_m^*) = \int_0^1 \left\{ \beta_m^{*2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta_m^* x^*) + 2\beta_m^* H_1 L \frac{1}{2} (\sin 2\beta_m^* x^*) + H_1^2 L^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\beta_m^* x^*) \right\} dx^*$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2} \beta_m^{*2} \int_0^1 (1 + \cos 2\beta_m^* x^*) dx^* + \beta_m^* H_1 L \int_0^1 (\sin 2\beta_m^* x^*) dx^* + \frac{1}{2} H_1^2 L^2 \int_0^1 (1 - \cos 2\beta_m^* x^*) dx^*$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2} \beta_m^{*2} \left[ x^* + \frac{1}{2\beta_m^*} \sin 2\beta_m^* x^* \right]_0^1 - \beta_m^* H_1 L \left[ \frac{1}{2\beta_m^*} \cos 2\beta_m^* x^* \right]_0^1 + \frac{1}{2} H_1^2 L^2 \left[ x^* - \frac{1}{2\beta_m^*} \sin 2\beta_m^* x^* \right]_0^1$$

$$\begin{aligned}
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\beta_m^{*2}\left(1 + \frac{1}{2\beta_m^*}\sin 2\beta_m^*\right) - \beta_m^*H_1L\left(\frac{1}{2\beta_m^*}\cos 2\beta_m^* - \frac{1}{2\beta_m^*}\right) + \frac{1}{2}H_1^2L^2\left(1 - \frac{1}{2\beta_m^*}\sin 2\beta_m^*\right) \\
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{\beta_m^*}{4}\sin 2\beta_m^* - \frac{H_1L}{2}\cos 2\beta_m^* + \frac{H_1L}{2} + \frac{1}{2}H_1^2L^2 - \frac{H_1^2L^2}{4\beta_m^*}\sin 2\beta_m^* \\
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2 + \frac{\beta_m^*}{4}\sin 2\beta_m^* - \frac{1}{2}H_1L\cos 2\beta_m^* - \frac{1}{4\beta_m^*}H_1^2L^2\sin 2\beta_m^* \\
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2 + \left(\frac{\beta_m^*}{4} - \frac{1}{4\beta_m^*}H_1^2L^2\right)\sin 2\beta_m^* - \frac{1}{2}H_1L\cos 2\beta_m^*
 \end{aligned}$$

なお、2倍角の公式が、 $\sin 2\beta_m^* = \frac{2 \tan \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*}$  と、 $\cos 2\beta_m^* = \frac{1 - \tan^2 \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*}$  であるから、

$$\begin{aligned}
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2 + \left(\frac{\beta_m^*}{4} - \frac{1}{4\beta_m^*}H_1^2L^2\right)\frac{2 \tan \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*} - \frac{1}{2}H_1L\frac{1 - \tan^2 \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \\
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2 + \frac{\frac{\beta_m^{*2} - H_1^2L^2}{4\beta_m^*} 2 \tan \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*} - \frac{H_1L(1 - \tan^2 \beta_m^*)}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \\
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2 + \frac{1}{2}\frac{\frac{\beta_m^{*2} - H_1^2L^2}{\beta_m^*} \tan \beta_m^* - H_1L(1 - \tan^2 \beta_m^*)}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \\
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2}\left(\beta_m^{*2} + H_1L + H_1^2L^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\frac{\beta_m^{*2} - H_1^2L^2}{\beta_m^*} \tan \beta_m^* - H_1L(1 - \tan^2 \beta_m^*)}{1 + \tan^2 \beta_m^*}
 \end{aligned}$$

以上式 (4-82) から、

$$\begin{aligned}
 N^*(\beta_m^*) &= \int_0^1 X_n^*(x^*) dx^* \\
 &= \frac{1}{2}\left(\beta_m^{*2} + H_1L + H_1^2L^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\frac{\beta_m^{*2} - H_1^2L^2}{\beta_m^*} \tan \beta_m^* - H_1L(1 - \tan^2 \beta_m^*)}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \quad (4-91)
 \end{aligned}$$

がもとまった。

次に式 (4-82b) から

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2\beta_n^*} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X_m^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^*$$

ノルム  $N^*(\beta_n^*)$  を求める。

固有関数, 式 (4-76) から,

$$X^*(\beta_n^*, x^*) = \beta_n^* \cos \beta_n^* x^* + H_1 L \sin \beta_n^* x^*$$

$$\frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} = \cos \beta_n^* x^* - \beta_n^* x^* \sin \beta_n^* x^* + H_1 L x^* \cos \beta_n^* x^*$$

$$\frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} = (1 + H_1 L x^*) \cos \beta_n^* x^* - \beta_n^* x^* \sin \beta_n^* x^*$$

$$\frac{\partial X_m^*}{\partial x^*} = -(\beta_n^*)^2 \sin \beta_n^* x^* + H_1 L \beta_n^* \cos \beta_n^* x^*$$

$$\frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_m^*}{\partial x^*} = \left\{ (1 + H_1 L x^*) \cos \beta_n^* x^* - \beta_n^* x^* \sin \beta_n^* x^* \right\} \left\{ -(\beta_n^*)^2 \sin \beta_n^* x^* + H_1 L \beta_n^* \cos \beta_n^* x^* \right\}$$

$$\frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_m^*}{\partial x^*} = (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + (1 + H_1 L x^*) H_1 L \beta_n^* \cos^2 \beta_n^* x^*$$

$$-(\beta_n^*)^2 (1 + H_1 L x^*) \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* - H_1 L (\beta_n^*)^2 \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^*$$

$$\frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_m^*}{\partial x^*} = (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + (1 + H_1 L x^*) H_1 L \beta_n^* \cos^2 \beta_n^* x^*$$

$$-\left\{ (\beta_n^*)^2 (1 + H_1 L x^*) + H_1 L (\beta_n^*)^2 \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^*$$

$$\frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_m^*}{\partial x^*} = (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + (H_1 L \beta_n^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) \cos^2 \beta_n^* x^*$$

$$-\left\{ (\beta_n^*)^2 (1 + H_1 L x^* + H_1 L) \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^*$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= -2(\beta_n^*) \sin \beta_n^* x^* - (\beta_n^*)^2 x^* \cos \beta_n^* x^* + H_1 L \cos \beta_n^* x^* - H_1 L \beta_n^* x^* \sin \beta_n^* x^* \\
 &= \left(-2(\beta_n^*) - H_1 L \beta_n^* x^*\right) \sin \beta_n^* x^* + \left(H_1 L - (\beta_n^*)^2 x^*\right) \cos \beta_n^* x^* \\
 X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left\{ \left(-2(\beta_n^*) - H_1 L \beta_n^* x^*\right) \sin \beta_n^* x^* + \left(H_1 L - (\beta_n^*)^2 x^*\right) \cos \beta_n^* x^* \right\} \\
 &\quad \cdot \left(\beta_n^* \cos \beta_n^* x^* + H_1 L \sin \beta_n^* x^*\right) \\
 X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left(-2(\beta_n^*) - H_1 L \beta_n^* x^*\right) H_1 L \sin^2 \beta_n^* x^* + \left(H_1 L - (\beta_n^*)^2 x^*\right) \beta_n^* \cos^2 \beta_n^* x^* \\
 &\quad + \left(-2(\beta_n^*) - H_1 L \beta_n^* x^*\right) \beta_n^* \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* + \left(H_1 L - (\beta_n^*)^2 x^*\right) H_1 L \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \\
 X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left(-2(\beta_n^*) - H_1 L \beta_n^* x^*\right) H_1 L \sin^2 \beta_n^* x^* + \left(H_1 L - (\beta_n^*)^2 x^*\right) \beta_n^* \cos^2 \beta_n^* x^* \\
 &\quad + \left\{ \left(-2(\beta_n^*) - H_1 L \beta_n^* x^*\right) + \left(H_1 L - (\beta_n^*)^2 x^*\right) \right\} \beta_n^* \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \\
 X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left(-2H_1 L (\beta_n^*) - H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*\right) \sin^2 \beta_n^* x^* + \left(H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^*\right) \cos^2 \beta_n^* x^* \\
 &\quad + \left\{ -2(\beta_n^*)^2 - H_1 L (\beta_n^*)^2 x^* + H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \\
 \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + \left(H_1 L \beta_n^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*\right) \cos^2 \beta_n^* x^* \\
 &\quad - \left\{ (\beta_n^*)^2 (1 + H_1 L x^* + H_1 L) \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \\
 &\quad - \left[ \begin{aligned} &\left(-2H_1 L (\beta_n^*) - H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*\right) \sin^2 \beta_n^* x^* + \left(H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^*\right) \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ -2(\beta_n^*)^2 - H_1 L (\beta_n^*)^2 x^* + H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + (H_1 L \beta_n^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &- \left\{ (\beta_n^*)^2 (1 + H_1 L x^* + H_1 L) \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \\ &+ \left[ \begin{aligned} &\left( 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right) \sin^2 \beta_n^* x^* - \left( H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^* \right) \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &- \left\{ -2(\beta_n^*)^2 - H_1 L (\beta_n^*)^2 x^* + H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + (H_1 L \beta_n^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &- \left\{ (\beta_n^*)^2 (1 + 2H_1 L x^*) \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \\ &+ \left[ \begin{aligned} &\left( 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right) \sin^2 \beta_n^* x^* - \left( H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^* \right) \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ 2(\beta_n^*)^2 + H_1 L (\beta_n^*)^2 x^* - H_1^2 L^2 + (\beta_n^*)^2 H_1 L x^* \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left\{ (\beta_n^*)^3 x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right\} \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (H_1 L \beta_n^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &2(\beta_n^*)^2 + H_1 L (\beta_n^*)^2 x^* - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* \\ &-(\beta_n^*)^2 - (\beta_n^*)^2 H_1 L x^* - (\beta_n^*)^2 H_1 L \end{aligned} \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left\{ (\beta_n^*)^3 x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right\} \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) + (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* - (\beta_n^*)^2 H_1 L \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left\{ (\beta_n^*)^3 x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right\} \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) + (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* - (\beta_n^*)^2 H_1 L \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* x^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ (H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) \cos^2 \beta_n^* x^* + (\beta_n^*)^3 x^* \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* - (\beta_n^*)^2 H_1 L \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* (\sin^2 \beta_n^* x^* + \cos^2 \beta_n^* x^*) \\ &+ H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* (\sin^2 \beta_n^* x^* + \cos^2 \beta_n^* x^*) \\ &+ 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* x^* + \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* - (\beta_n^*)^2 H_1 L \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* - (\beta_n^*)^2 H_1 L \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + (H_1 L \beta_n^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &- \left\{ (\beta_n^*)^2 (1 + 2H_1 L x^*) \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \\ &+ \left[ \begin{aligned} &\left( 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right) \sin^2 \beta_n^* x^* - \left( H_1 L \beta_n^* - (\beta_n^*)^3 x^* \right) \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ 2(\beta_n^*)^2 + H_1 L (\beta_n^*)^2 x^* - H_1^2 L^2 + (\beta_n^*)^2 H_1 L x^* \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left\{ (\beta_n^*)^3 x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right\} \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (H_1 L \beta_n^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) - H_1 L \beta_n^* + (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \cos^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ 2(\beta_n^*)^2 + H_1 L (\beta_n^*)^2 x^* - H_1^2 L^2 + (\beta_n^*)^2 H_1 L x^* - (\beta_n^*)^2 - 2(\beta_n^*)^2 H_1 L x^* \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= \left\{ (\beta_n^*)^3 x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \right\} \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) + (\beta_n^*)^3 x^* \right\} \cos^2 \beta_n^* x^* + \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1^2 L^2 \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* \sin^2 \beta_n^* x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* x^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ (H_1^2 L^2 \beta_n^* x^*) \cos^2 \beta_n^* x^* + (\beta_n^*)^3 x^* \cos^2 \beta_n^* x^* + \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1^2 L^2 \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* (\sin^2 \beta_n^* x^* + \cos^2 \beta_n^* x^*) \\ &+ H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* (\sin^2 \beta_n^* x^* + \cos^2 \beta_n^* x^*) \\ &+ 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* x^* + \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1^2 L^2 \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} &= (\beta_n^*)^3 x^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* x^* \\ &+ \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1^2 L^2 \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \end{aligned}$$

したがって

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2\beta_n^*} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X_m^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^*$$

$$= \frac{1}{2\beta_n^*} \left[ (\beta_n^*)^3 x^* + H_1^2 L^2 \beta_n^* x^* + 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* x^* + \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1^2 L^2 \right\} \sin \beta_n^* x^* \cos \beta_n^* x^* \right]_0^1$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2\beta_n^*} \left[ (\beta_n^*)^3 + H_1^2 L^2 \beta_n^* + 2H_1 L (\beta_n^*) \sin^2 \beta_n^* + \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1^2 L^2 \right\} \sin \beta_n^* \cos \beta_n^* \right]$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left[ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + 2H_1 L \sin^2 \beta_n^* + \frac{1}{\beta_n^*} \left\{ (\beta_n^*)^2 - H_1^2 L^2 \right\} \sin \beta_n^* \cos \beta_n^* \right]$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left[ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + 2H_1 L \sin^2 \beta_n^* + \frac{1}{\beta_n^*} (\beta_n^* + H_1 L)(\beta_n^* - H_1 L) \sin \beta_n^* \cos \beta_n^* \right]$$

$$\sin^2 \beta_n^* = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta_n^*), \quad \sin \beta_n^* \cos \beta_n^* = \frac{1}{2} \sin 2\beta_n^*$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left[ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + H_1 L (1 - \cos 2\beta_n^*) + \frac{1}{2\beta_n^*} (\beta_n^* + H_1 L)(\beta_n^* - H_1 L) \sin 2\beta_n^* \right]$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left[ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + H_1 L - H_1 L \cos 2\beta_n^* + \frac{1}{2\beta_n^*} (\beta_n^* + H_1 L)(\beta_n^* - H_1 L) \sin 2\beta_n^* \right]$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left\{ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + H_1 L \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\beta_n^*} (\beta_n^* + H_1 L)(\beta_n^* - H_1 L) \sin 2\beta_n^* - H_1 L \cos 2\beta_n^* \right\}$$

$$\sin 2\beta_m^* = \frac{2 \tan \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*}, \quad \cos 2\beta_m^* = \frac{1 - \tan^2 \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*}$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left\{ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + H_1 L \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\beta_n^*} (\beta_n^* + H_1 L)(\beta_n^* - H_1 L) \frac{2 \tan \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*} - H_1 L \frac{1 - \tan^2 \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \right\}$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left\{ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + H_1 L \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\beta_n^* + H_1 L)(\beta_n^* - H_1 L) \tan \beta_m^*}{1 + \tan^2 \beta_m^*} - \frac{H_1 L (1 - \tan^2 \beta_m^*)}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \right\}$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2} \left\{ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + H_1 L \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{1}{\beta_n^*} (\beta_n^* + H_1 L)(\beta_n^* - H_1 L) \tan \beta_m^* - H_1 L (1 - \tan^2 \beta_m^*)}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 N^*(\beta_n^*) &= \frac{1}{2\beta_n^*} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X_m^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^* \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ (\beta_n^*)^2 + H_1^2 L^2 + H_1 L \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{1}{\beta_n^*} (\beta_n^* + H_1 L) (\beta_n^* - H_1 L) \tan \beta_m^* - H_1 L (1 - \tan^2 \beta_m^*)}{1 + \tan^2 \beta_m^*} \right\} \quad (4-92)
 \end{aligned}$$

式 (4-91) と同じ式が得られた. すなわち式 (4-82a)

$$N^*(\beta_n^*) = \int_0^1 X_n^{*2}(x^*) dx^* \text{ から求めた式 (4-91) が, 式 (4-82b)}$$

$$N^*(\beta_n^*) = \frac{1}{2\beta_n^*} \int_0^1 \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\partial X_n^*}{\partial \beta_n^*} \frac{\partial X_n^*}{\partial x^*} - X_m^* \frac{\partial^2 X_n^*}{\partial \beta_n^* \partial x^*} \right) dx^* \text{ から導出され, 一致した.}$$

前者はは直交関係の内積から直接導かれ, その不定形を解消するためにロピタルの定理から導かれた後者は等価だが式は異なる. 算出結果の一致は①式 (4-82) そのものの正しさ, ②算出過程の正しさを確認できたことになる.

このあとの固有値 (4-73) を使い,  $N(\beta_m)$  を求める.

式 (4-73) を式 (4-91) に代入すると

$$\begin{aligned}
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2} \beta_m^{*2} + \frac{1}{2} H_1 L + \frac{1}{2} H_1^2 L^2 \\
 &+ \frac{\frac{\beta_m^{*2} - H_1^2 L^2}{2\beta_m^*} \beta_m^* L \frac{H_1 + H_2}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2} - \frac{H_1 L}{2} + \frac{H_1 L}{2} \left( \beta_m^* L \frac{H_1 + H_2}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2} \right)^2}{1 + \left( \beta_m^* L \frac{H_1 + H_2}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2} \right)^2} \\
 N^*(\beta_m^*) &= \frac{1}{2} \beta_m^{*2} + \frac{1}{2} H_1 L + \frac{1}{2} H_1^2 L^2 \\
 &+ \frac{\frac{\beta_m^{*2} - H_1^2 L^2}{2\beta_m^*} \beta_m^* L \frac{H_1 + H_2}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2} - \frac{H_1 L}{2} \left\{ 1 - \left( \beta_m^* L \frac{H_1 + H_2}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2} \right)^2 \right\}}{1 + \left( \beta_m^* L \frac{H_1 + H_2}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2} \right)^2}
 \end{aligned}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2$$

$$+ \frac{2\beta_m^*L(H_1+H_2)(\beta_m^{*2}-H_1^2L^2)(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2) - 4\beta_m^*\frac{H_1L}{2}(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + 4\beta_m^*\frac{H_1L}{2}\{\beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2\}}{4\beta_m^*(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2}$$

$$+ \frac{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + \beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2}{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}L(H_1+H_2)(\beta_m^{*2}-H_1^2L^2)(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2) - H_1L(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + H_1L\{\beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2\}}{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2}}{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + \beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2}$$

$$+ \frac{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2}{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}\beta_m^{*2} + \frac{1}{2}H_1L + \frac{1}{2}H_1^2L^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}L(H_1+H_2)(\beta_m^{*2}-H_1^2L^2)(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2) - H_1L(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + H_1L\{\beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2\}}{2\{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + \beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2\}}}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{\beta_m^{*2} + H_1L + H_1^2L^2}{2}$$

$$+ \frac{L(H_1+H_2)(\beta_m^{*2}-H_1^2L^2)(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2) - H_1L(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + H_1L\{\beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2\}}{2\{(\beta_m^{*2}-H_1H_2L^2)^2 + \beta_m^{*2}L^2(H_1+H_2)^2\}}$$

$$P = \beta_m^{*2} - H_1H_2L^2, \quad Q = \beta_m^{*2} - H_1^2L^2, \quad R = H_1 + H_2$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{\beta_m^{*2} + H_1L + H_1^2L^2}{2} + \frac{LRQP - H_1LP^2 + H_1\beta_m^{*2}L^3R^2}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{(\beta_m^{*2} + H_1L + H_1^2L^2)(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2) + LRQP - H_1LP^2 + H_1\beta_m^{*2}L^3R^2}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{(\beta_m^{*2}P^2 + H_1LP^2 + H_1^2L^2P^2 + \beta_m^{*2}\beta_m^{*2}L^2R^2 + H_1L\beta_m^{*2}L^2R^2 + H_1^2L^2\beta_m^{*2}L^2R^2) + LRQP - H_1LP^2 + H_1\beta_m^{*2}L^3R^2}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{(\beta_m^{*2}P^2 + H_1LP^2 + H_1^2L^2P^2 + \beta_m^{*4}L^2R^2 + H_1\beta_m^{*2}L^3R^2 + H_1^2\beta_m^{*2}L^4R^2) + LRQP - H_1LP^2 + H_1\beta_m^{*2}L^3R^2}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{\beta_m^{*2}P^2 + H_1LP^2 + H_1^2L^2P^2 + \beta_m^{*4}L^2R^2 + H_1\beta_m^{*2}L^3R^2 + H_1^2\beta_m^{*2}L^4R^2 + LRQP - H_1LP^2 + H_1\beta_m^{*2}L^3R^2}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{\beta_m^{*2}P^2 + H_1^2L^2P^2 + \beta_m^{*4}L^2R^2 + 2H_1\beta_m^{*2}L^3R^2 + H_1^2\beta_m^{*2}L^4R^2 + LRQP}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{+\beta_m^{*4}L^2R^2 + \beta_m^{*2}P^2 + H_1^2\beta_m^{*2}L^4R^2 + 2H_1\beta_m^{*2}L^3R^2 + H_1^2L^2P^2 + LRQP}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{+\beta_m^{*2}(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2) + H_1^2L^2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2) + 2H_1\beta_m^{*2}L^3R^2 + LRQP}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2)(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2) + 2H_1\beta_m^{*2}L^3R^2 + LRQP}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$P = \beta_m^{*2} - H_1H_2L^2, \quad Q = \beta_m^{*2} - H_1^2L^2, \quad R = H_1 + H_2$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2)$$

$$+ \frac{2H_1\beta_m^{*2}L^3R^2 + LRQP}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)} = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2) + \frac{LR(2H_1\beta_m^{*2}L^2R + QP)}{2(P^2 + \beta_m^{*2}L^2R^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2)$$

$$+ \frac{L(H_1 + H_2)\{2H_1\beta_m^{*2}L^2(H_1 + H_2) + (\beta_m^{*2} - H_1^2L^2)(\beta_m^{*2} - H_1H_2L^2)\}}{2(\beta_m^{*2} - H_1H_2L^2)^2 + 2\beta_m^{*2}L^2(H_1 + H_2)^2}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2)$$

$$+ \frac{L(H_1 + H_2)\{2H_1^2\beta_m^{*2}L^2 + 2H_1H_2\beta_m^{*2}L^2 + \beta_m^{*4} - \beta_m^{*2}H_1^2L^2 + H_1^3H_2L^4 - \beta_m^{*2}H_1H_2L^2\}}{2(\beta_m^{*2} - H_1H_2L^2)^2 + 2\beta_m^{*2}L^2(H_1 + H_2)^2}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2)$$

$$+ \frac{L(H_1 + H_2)\{\beta_m^{*2}H_1^2L^2 + \beta_m^{*2}H_1H_2L^2 + \beta_m^{*4} + H_1^3H_2L^4\}}{2\beta_m^{*4} - 4\beta_m^{*2}H_1H_2L^2 + 2H_1^2H_2^2L^4 + 2\beta_m^{*2}L^2H_1^2 + 4\beta_m^{*2}H_1H_2L^2 + 2\beta_m^{*2}H_2^2L^2}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2) + \frac{L(H_1 + H_2)(\beta_m^{*2} + H_1H_2L^2)(\beta_m^{*2} + H_1^2L^2)}{2\beta_m^{*4} + 2H_1^2H_2^2L^4 + 2\beta_m^{*2}H_1^2L^2 + 2\beta_m^{*2}H_2^2L^2}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2 L^2) + \frac{L(H_1 + H_2)(\beta_m^{*2} + H_1 H_2 L^2)(\beta_m^{*2} + H_1^2 L^2)}{2(\beta_m^{*2} + H_1^2 L^2)(\beta_m^{*2} + H_2^2 L^2)}$$

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2}(\beta_m^{*2} + H_1^2 L^2) + \frac{L(H_1 + H_2)(\beta_m^{*2} + H_1 H_2 L^2)}{2(\beta_m^{*2} + H_2^2 L^2)} \quad (4-93)$$

結果を整理すると,

無次元化した一次元熱伝導方程式は式(4-51)から

$$\frac{\partial^2 T^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial T^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad \text{in } 0 \leq x^* \leq 1, \quad 0 \leq t^*$$

境界条件

式(4-53a) 上面

$$-\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_1 L}{k_1} T^* = 0 \quad \text{at } x^* = 0, \quad t^* > 0$$

式(4-53b) 下面

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{h_2 L}{k_2} T^* = 0 \quad \text{at } x^* = 1, \quad t^* > 0$$

温度領域  $T_{q-1}^* \leq T^* \leq T_q^*$  における  $\tau_q^* \equiv t_q^* - t_{q-1}^*$  の時間領域において

式(4-52) 初期条件は

$$T^*(x^*, t^*) = F(x^*) \quad \text{when } t^* = 0, \quad \text{in } 0 \leq x^* \leq 1$$

式(4-75) 固有値は

$$\tan \beta_m^* = \frac{\beta_m^* L (H_1 + H_2)}{\beta_m^{*2} - H_1 H_2 L^2}$$

式(4-76) 固有関数は

$$X^*(\beta_m^*, x^*) = \beta_m^* \cos \beta_m^* x^* + H_1 L \sin \beta_m^* x^*$$

式(4-89) 解析解の温度分布は

温度領域  $T_{q-1}^* \leq T^* \leq T_q^*$  における  $\tau_q^* \equiv t_q^* - t_{q-1}^*$  の時間領域において

$$T^*(x^*, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^* t} \frac{1}{N^*(\beta_m^*)} X^*(\beta_m^*, x^*) \int_0^1 X^*(\beta_m^*, x^*) F(x^*) dx^* \quad \text{in } 0 < x^* < 1$$

式(4-90)  $\tau_q^* \rightarrow 0$  において初期温度  $F(x^*)$  は

$$F(x^*) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N^*(\beta_m^*)} X^*(\beta_m^*, x^*) \int_0^L X^*(\beta_m^*, x^*) F(x^*) dx^* \quad \text{in } 0 < x^* < 1$$

式(4-91) ノルム  $N^*(\beta_m^*)$  は

$$N^*(\beta_m^*) = \frac{1}{2} (\beta_m^{*2} + H_1^2 L^2) + \frac{L(H_1 + H_2)(\beta_m^{*2} + H_1 H_2 L^2)}{2(\beta_m^{*2} + H_2^2 L^2)}$$

ただし式(4-14) から  $H_1 = \frac{h_1}{k_1}$  ,  $H_2 = \frac{h_2}{k_2}$

$\alpha = \frac{k}{c_p \rho}$  は試験片の温度拡散率 Thermal Diffusivity [ $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ],  $k$  は熱伝導率 Heat

conductivity [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ],  $c_p$  は定圧比熱 Isobaric specific heat [ $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ],  $\rho$  は

密度 Density [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ],  $h_1$  は上面の熱伝達率 the heat transfer coefficient of the top surface

[ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ], そして  $h_2$  は下面の熱伝達率 the heat transfer coefficient of the bottom

surface [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ] である.

この手順により, 特定の温度範囲における温度分布 (4-89) を計算し, その値を初期条件 (4-90) として次の温度領域の温度分布の計算を続行できる.

#### 4.5 熱伝達率の同定手順

冷却プロセスの各時間ステップに対する熱伝達率曲線は, Fig. 4.4に示す手順で求めた.



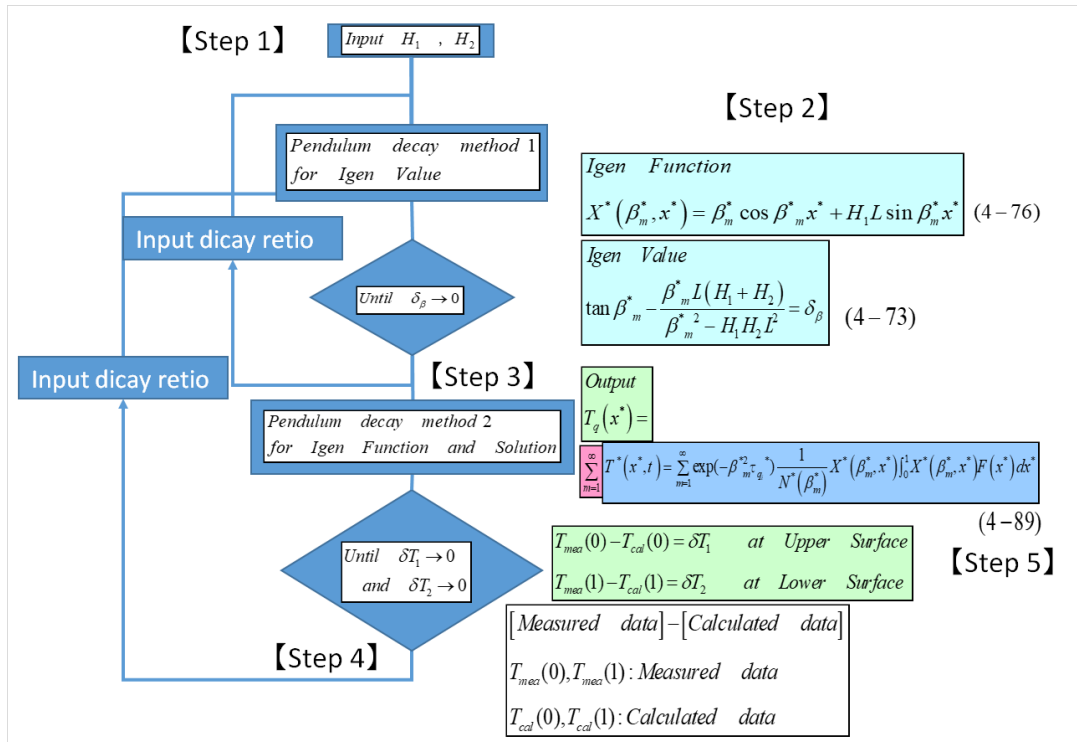


Fig. 4.4 The procedure of identification of heat transfer coefficients from flat plate cooling curves by inverse method. <sup>7</sup>

上面または下面の温度が一定の値まで低下する温度のタイムステップを設定する。500°Cまでは1~3°C、500°C以降は6~12°Cの温度間隔で設定した。それぞれのタイムステップに対して次の手順で同定する。まず、前のタイムステップで同定した熱伝達率  $H_1, H_2$  を式 (28-1) に代入し、式 (28-1) の関係を満足する固有値  $\beta_m^*$  を減衰振り子方式で振幅を減衰させ許容値  $\leq \delta_\beta$  (以下) となるまで振れを繰り返して真値を求める【Step 1】。求めた  $\beta_m^*$  を式 (27-1), (22-1) に代入し上面の表面温度  $T_C^*$  を計算し、測定温度に対しが減衰振り子方式で振幅を減衰させ許容値  $T_m^* - T_C^* \leq \delta_T$  (以下) になるまで振れを繰り返して  $T_C^*$  を求める。このとき、 $H_1$  は与え直し【Step 1】の計算を都度行い、式 (28-1) を満足する  $\beta_m^*$

を求めなおす【Step 2】. 上面の  $H_1$  が求まったら, 次は  $H_2$  を与えなおし, 下面の  $H_2$  を同様の手順で求める【Step 3】. 下面の  $H_2$  が求まったら,  $H_2$  の変更で変化した上面の  $H_1$  の再計算を同様の方法で行う【Step 4】. 【Step 5】では, 上面における計算値  $T_{1c}$  と下面における  $T_{2c}$  が測定値との差がそれぞれ  $T_{1m}^* - T_{1c}^* \leq \delta_T$  and  $T_{2m}^* - T_{2c}^* \leq \delta_T$  になるまで【Step 1】から【Step 4】を繰り返し,  $H_1, H_2$  の同定を完了する.

このようにして, すべてのタイムステップ (60–200) の同定を完了し上下面それぞれの温度依存熱伝達率  $h_1(T), h_2(T)$ , すなわち熱伝達率曲線を求める.

#### 4.6 有限要素シミュレーションモデル

CAE 有限要素シミュレーションコード COSMAP に導入した二次元モデルを Fig. 4.5 に示す.

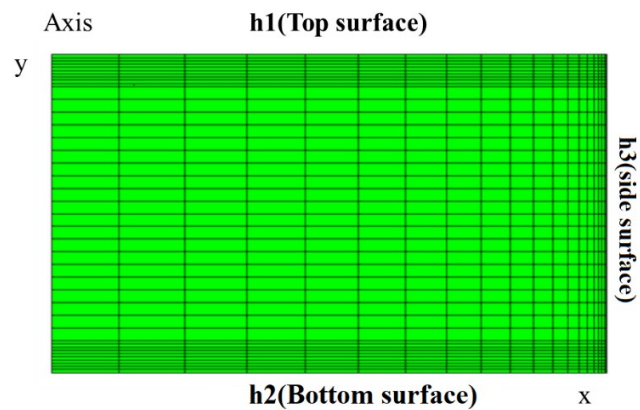


Fig. 4.5 Two-dimensional symmetric finite element model of a disk

## 4.7 結果と考察

### 4.7.1 冷却曲線測定結果

#### 4.7.1.1 SUS303Disc の結果

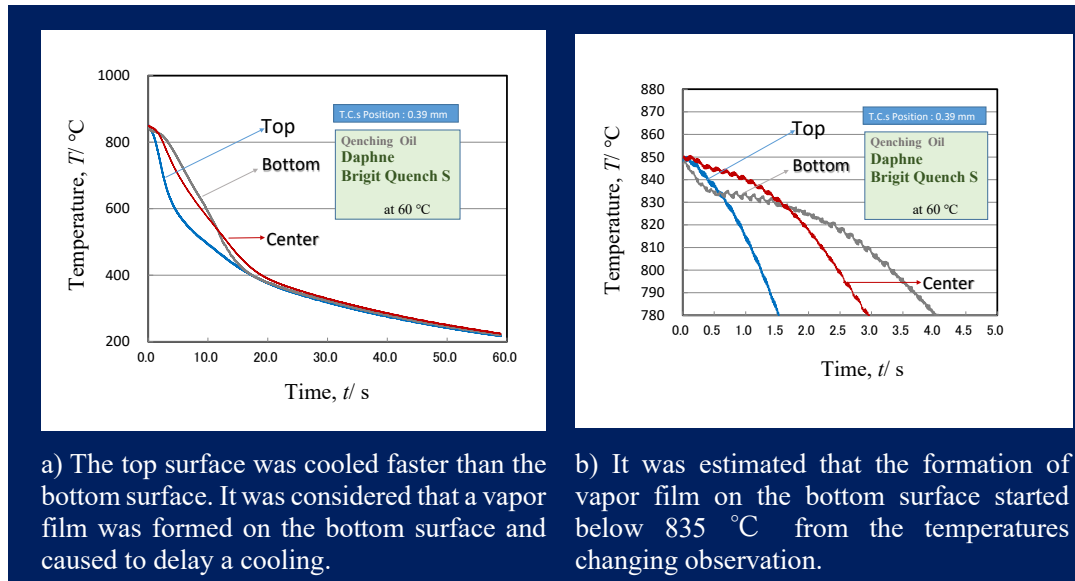


Fig. 4. 6.1 Cooling curves of SUS303 disk during quenching from 850 °C into cold quenching oil at 60 °C. Temperature measured point: 0.39 mm inside from the surface of the 6.74 ° oblique hole with respect to the horizontal. The surface was not polished in these experiments.

斜め穴を直径 1.2mm のハイスドリルで掘進め後述する最終表面近傍（を 0mm とし）その手前 0.39mm の位置に K.T.C.電気溶接プローブ（直径 0.3mm）を銀ペーストで固定した時の冷却曲線を Fig. 4. 6.1 a) にその拡大図を b) に示す。Fig. 4. 6.1 b)から上面の蒸気膜は明確に観察されない。下面の蒸気膜開始温度は 835°Cである。

上述のあと、ハイスドリルで斜め穴を掘り進め、後述する最終表面近傍（を 0mm とし）その手前 0.23mm の位置に K.T.C.電気溶接プローブ（直径 0.3mm）を銀ペーストで固定した時の冷却曲線を Fig. 3.6.2 a) に、その拡大図を b)に示す。Fig. 3.6.2 b) から、上面の蒸気膜は観察されない。下面の蒸気膜開始温度は 830 である。前述 Fig. 4.6.2 b) の 835°Cより 5°C低い値となった。

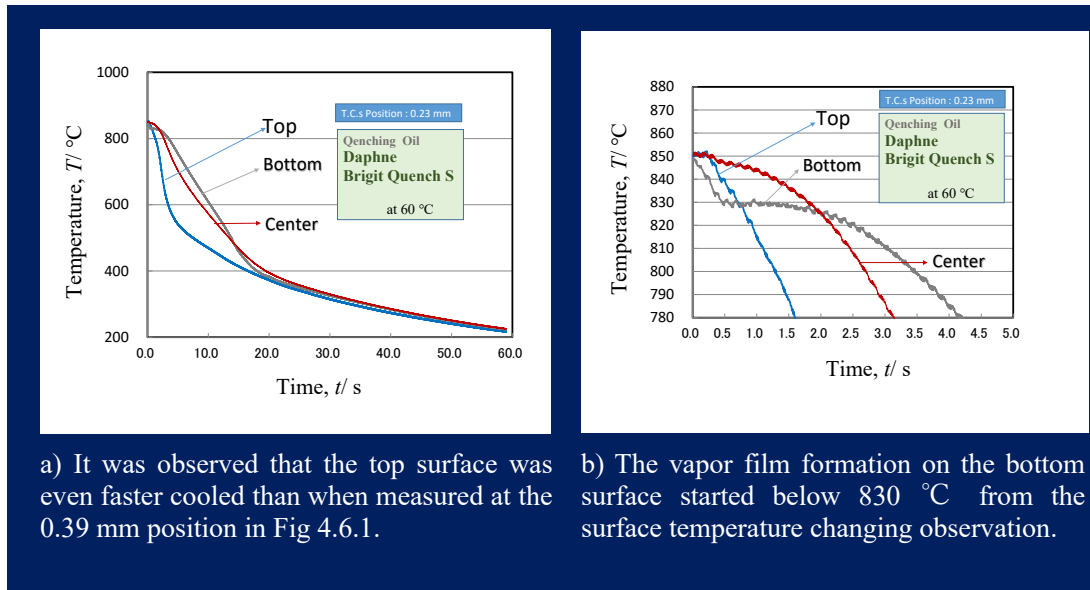


Fig. 4.6.2 Cooling curves of SUS303 disk during quenching from 850 °C into cold quenching oil at 60 °C. Temperature measured point: 0.23 mm inside from the surface of the 6.74 ° oblique hole with respect to the horizontal. The surface was not polished in these experiments.

この位置から表面に盛り上がりを見せるまでハイスドリルで斜め穴を掘り進めた。盛り上がる地点は、リング試験片の上面、下面の中央部で、のちに斜め 45 度上方からの Fig. 4.3.6 に示す X-ray 透視写真で穴は水平に対し 6.7-6.8 の角度で直線的にあいていることが確認された。ドリルの侵入長さや角度から表面への到達距離は 10~20 μm と推定された。

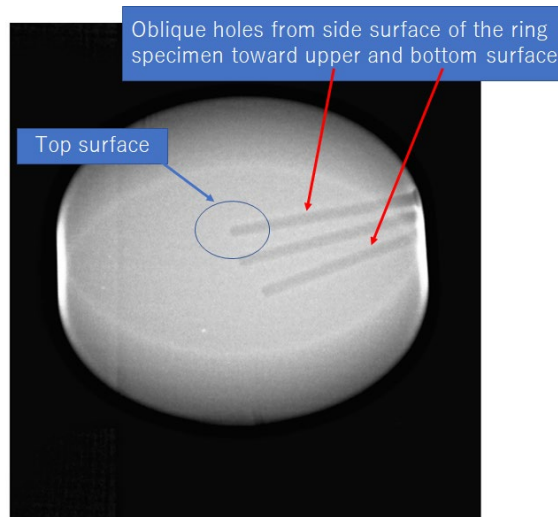


Fig. 4.6.3 X-ray inversion photograph from 45 degrees above the disk specimen.

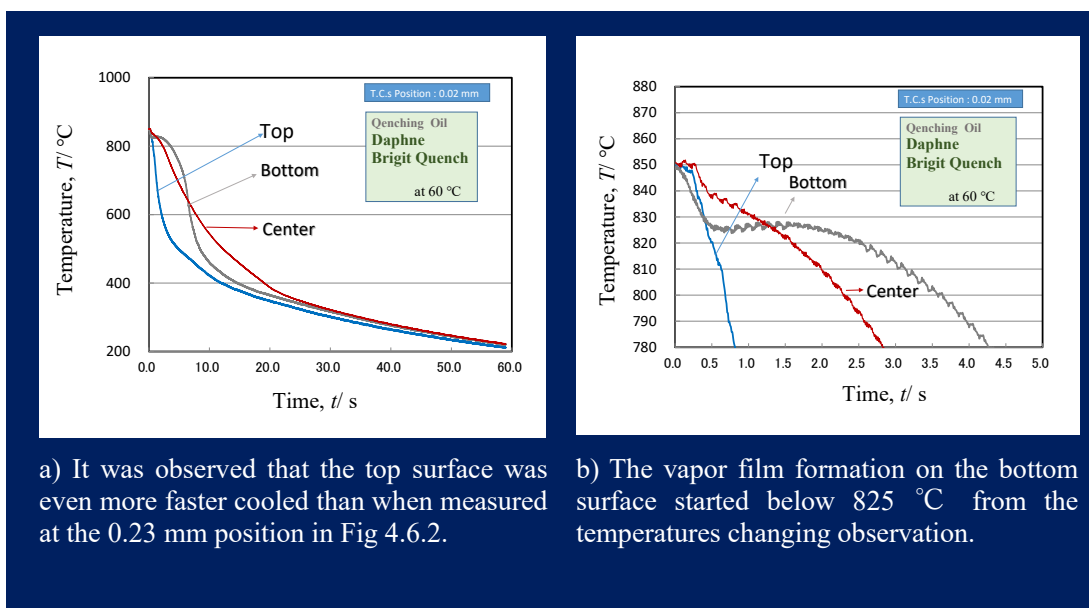


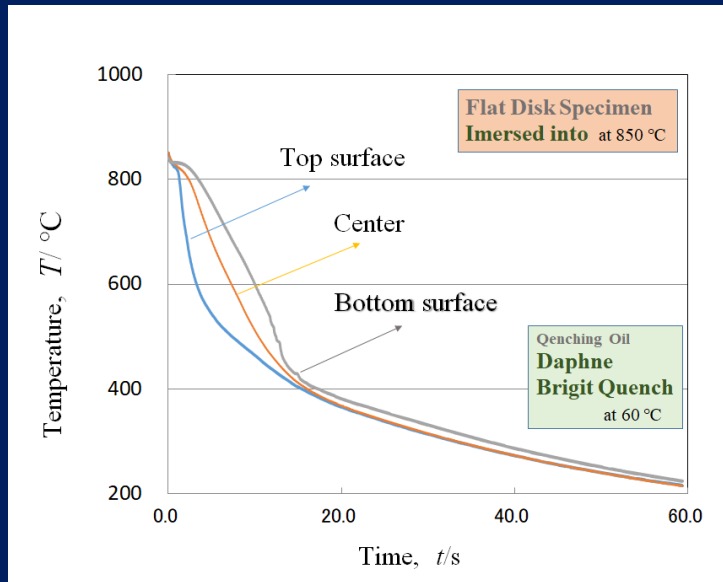
Fig. 4.6.4 Cooling curves of SUS303 disk during quenching from 850 °C into cold quenching oil at 60 °C. Temperature measured point: 0.02mm inside from the surface of the 6.74 ° oblique hole with respect to the horizontal. The surface was not polished in these experiments.

この位置に KT.C.電気溶接プローブ（直径 0.3mm）を銀ペーストで固定した時の冷却曲線を Fig. 4.6.4 a) に、拡大図を b) に示す。拡大図 Fig. 4.6.3 b) から上面に蒸気膜が 849 から 810 まで観察された。下面の蒸気膜開始温度は 825°C と読み取れた。Fig. 4.6.1 の穴より 0.39mm 掘り進むことにより 10°C 低い値となった。

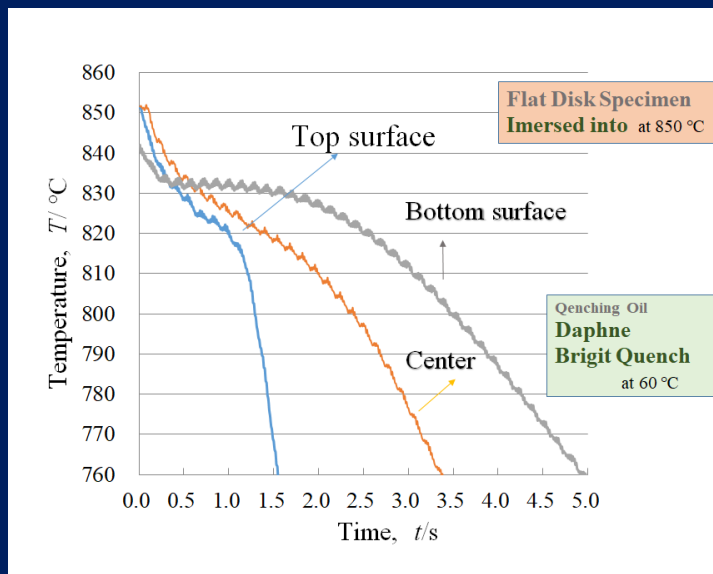
表面から、0.39mm、さらに 0.23mm 掘り進んでも観察できなかった上面における蒸気膜段階の緩冷却変曲点が、この時の表面への接近（ほぼ 0mm: 10~20 μm）点において、わずかな傾向の違いではあるが観察された。表面に近づくほど、温度変化を正確に読み取ることができることがわかる。

なお、上面には 520-400°C 付近に温度の直線的降下を読み取れる。何らかの組織変態による発熱が観察された。試験片を強力なネオジウム磁石に近づけるとわずかに磁力が感じられた。冷却曲線から観察される上述の発熱ピークはわずかな磁気変態によるものと考えられた。

4.7.1.2 SUS304Disc の結果



a) Cooling curves up to 60s



b) Enlarged view of the cooling curves up to 5s.

Fig. 4.7 Cooling curves of SUS304 disk during quenching from 850 °C into cold quenching oil at 60 °C. Temperature measure point: 0.02 mm inside from the surface of the 6.74 ° oblique hole with respect to the horizontal.

Surface polished with water-resistant sandpaper (# 60, # 240, # 1200) <sup>7</sup>

強力ネオジウム磁石に反応しない SUS304 材を使用し加工した試験片を用いて実験を行った。なおこの際、湿式エメリー紙で#60, #240, #1200 で表面研磨を施した。冷却実験結果を Fig. 4.7 a) に、その拡大図を b) に示す。上下面の第一沸騰段階のあと、上面の冷却曲線に 0.23 から 0.87s 間 (= 冷却開始 0.23~1.11s, 836.7~816.0°C) 蒸気膜段階が観測された。

その後特性温度 816°C を経て急冷される核沸騰段階に入り、10s 以降次第に緩冷却となり、15s 以降は下面と平行に冷却される対流段階での冷却へと続く過程をたどった。

一方、下面は 0.23s 以降の冷却曲線には穏やかに冷却される蒸気膜段階が 10s 以上続き 12 から 15s にかけて小さな温度変動を伴うやや急冷状態があり、15s 以降は上面と下面が平行な冷却カーブを描く対流段階の冷却へと続いた。

### 4.7.2 可視化実験結果

#### 4.7.2.1 240FPS における観察結果

冷却曲線に示される 0.23s までの第一沸騰段階においては、蒸気膜は蒸気泡が爆発的に発生し、下面でも安定した蒸気膜の形成は観察されなかった。しかし試験片投入 0.64s で、下面は安定した蒸気膜に変わり、レーザー光線をブロックする物質がディスクの後ろに影として観察された（下面にあるものは半透明状でよく見えないが Fig. 4.8.1 (b) に示すような後方に影は映っている）。試料熱処理油は沸点よりも高い温度の試験片表面に接触して気化し微細な蒸気泡にかわるが試験片下部にはそのまま滞留し合体はしていないことが Fig. 4.8.1 (b) よりわかる。

上述のようにレーザービームが遮断され影をつくる事実から、微細な蒸気粒子はレーザービームを透過せず、サイズは 532nm のレーザー光の波長よりも大きいと推測される。

このような微細蒸気泡より大きい蒸気泡は蒸気膜の周囲を活発に動き、自由に移動するのが観察された。約 40s 後、下面が 300°C に冷却されると、微細な蒸気泡で形成される蒸



気膜は消え, Fig. 4.8.2(d) に示すように, 側面下方からみて 1/10 程度に収縮した幅 15mm 厚さ 2mm ほどの泡が右回りに約 1 回/s で回転する様子が観察された (Fig. 4.8.2 (d)).

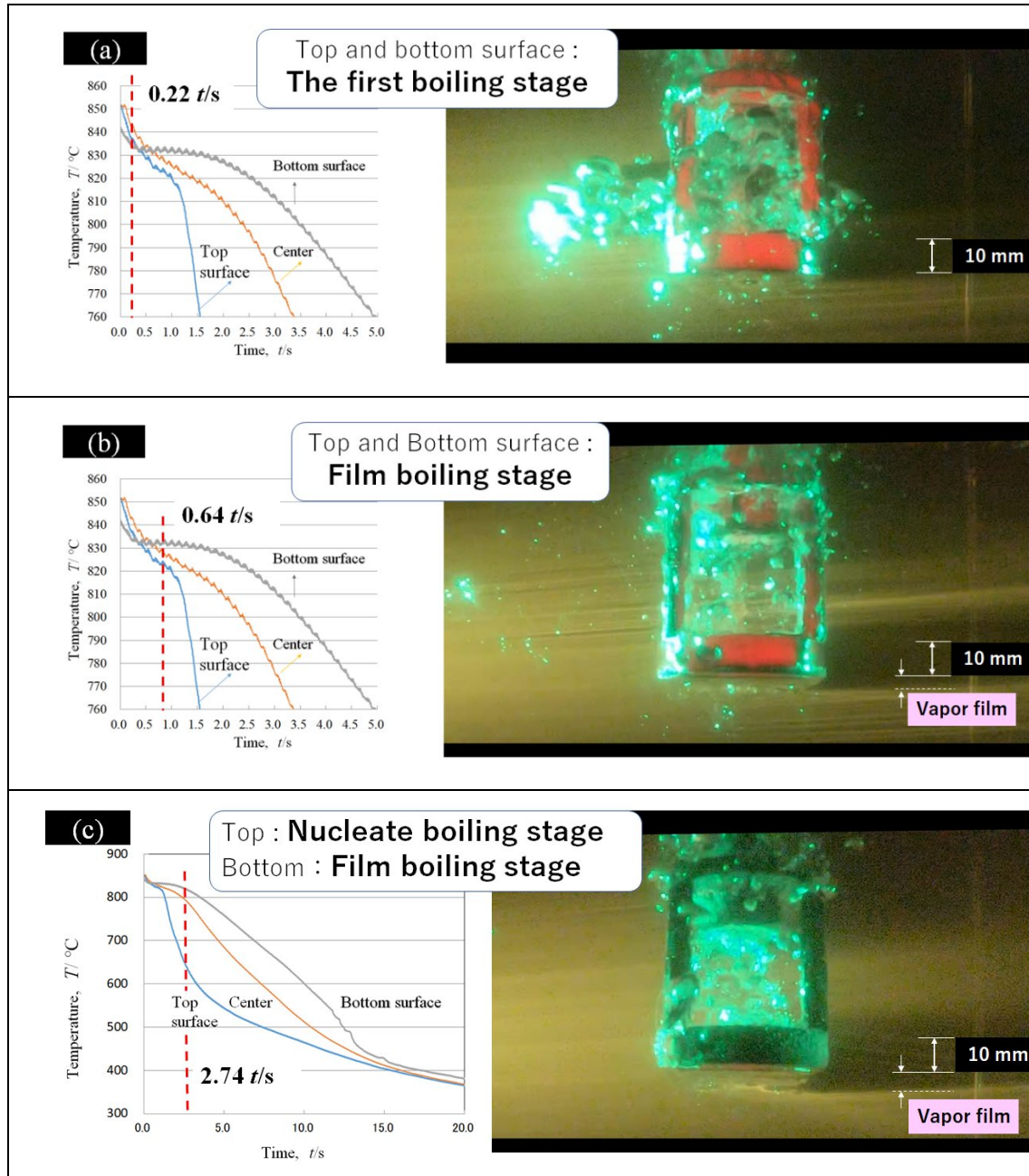


Fig. 4. 8.1 Cooling curves and visuelizing image (240 fps) between 0- 2.75 s. <sup>7</sup>



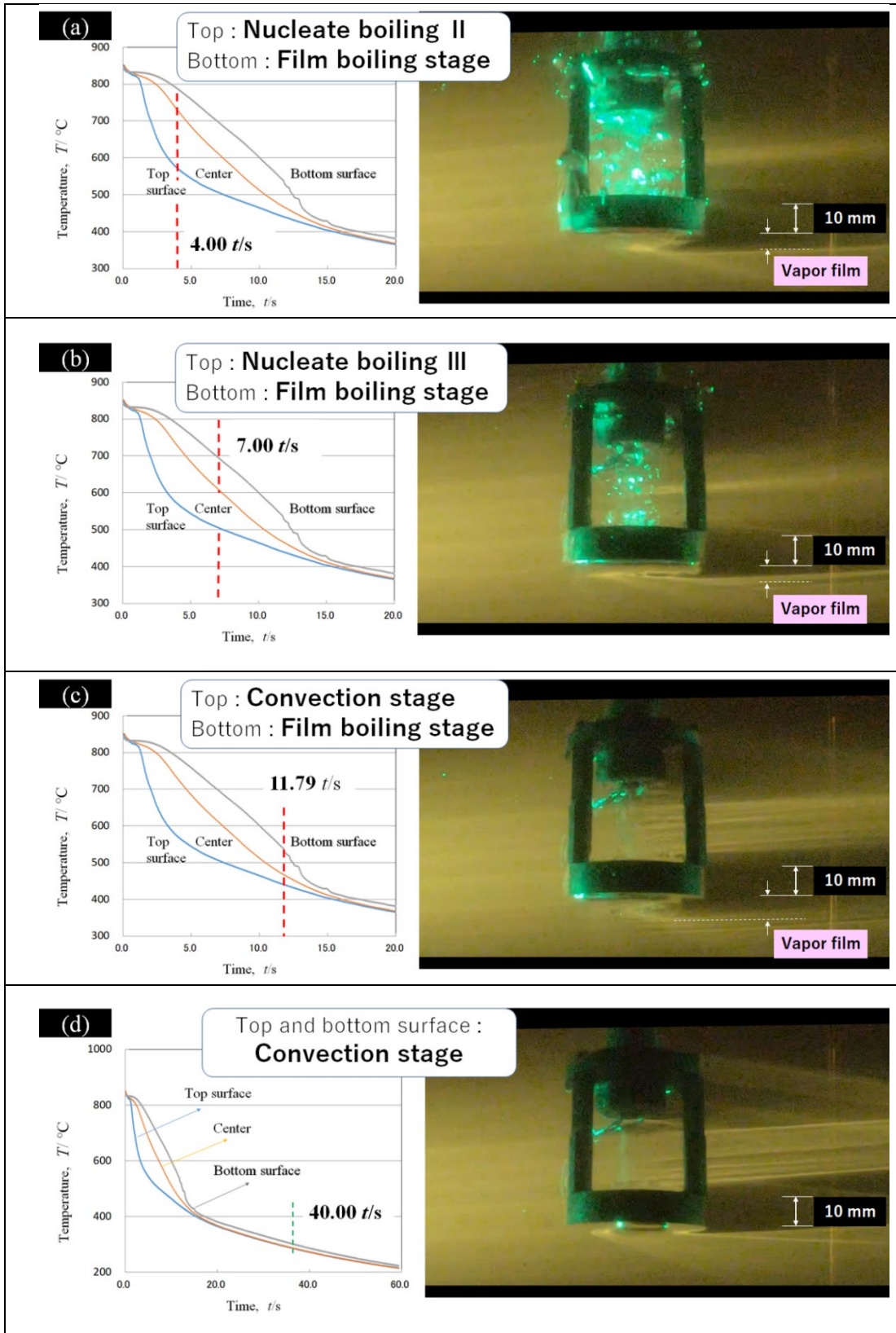


Fig. 4.8.2 Cooling curves and visualizing image (240 fps) between 4- 40 s. <sup>7</sup>

#### 4.7.2.2 960FPS における PIV 解析結果

冷却開始から約 7s 間撮影した 960FPS の 4K 画像を PIV 解析した結果の画像を次に示す。画像は最小コマ単位で 3 コマずつそれぞれの冷却領域を Fig. 4.9 (a)から(f) に示した。

(1) 第一沸騰段階を Fig. 4.9 (a)はとらえている。内部から周囲に向かう爆発的な流れが示され、上面、下面の区別なく各コマは連続的に変化していることがわかる。

(2) Fig. 4.9 (b) は、Fig. 4.7 の冷却曲線に示される上下面が第一沸騰段階から膜沸騰に移行する 0.23s を経過した状態である。0.340~0.346s には両面は膜沸騰段階に入り、上面は激しく混ざり合う上下左右の流れが交錯し下面は流れが小さい。流れのない約 1mm 幅の空間が下面の下方に出来上がっているのが Fig. 4.9 (b)からわかる。周囲に及ぼす第一沸騰段階の流れは残っている。

(3) 上面が蒸気膜段階にある 0.6400~0.6475s には周囲に及ぼす流れは減少し、上面の交錯した流れは対流流れの様相となっている。下面の動きは小さく流れのない空間は約 2mm に広がっていることが Fig. 4.9 (c)からわかる。

(4) Fig. 4.9 (d)は、Fig. 4.7 a), b) の冷却曲線に示される 1.11s, 816°Cにおける上面の特性温度を過ぎた核沸騰段階に入った状態 (1.3358~1.3383s) の様子を示している。上面には全体は上方向への大きい強い流れに一部逆らう下方への流れがあり、下面の動きは Fig. 4.9 c) と同じく流れは小さく、流れのない空間は約 10mm 幅に広がっている。また、断続的に周囲に向かって強い流れの発生していることが Fig. 4.9 (d), 0.1336, 0.3375, 1.338s の変化より読み取れる。

(5) Fig. 4.7 の冷却曲線で核沸騰の急冷が続く 1.5258~1.5283s には Fig. 4.9 (d)の動きが引き続き同様に起こっていることが Fig. 4.9 (e) からわかる。2.7500~2.751s の冷却速度がやや低下する領域では上面上方の流れは小さくなり、断続的な周囲への流れも小さくなっていることが Fig. 4.9 (f) よりわかる。

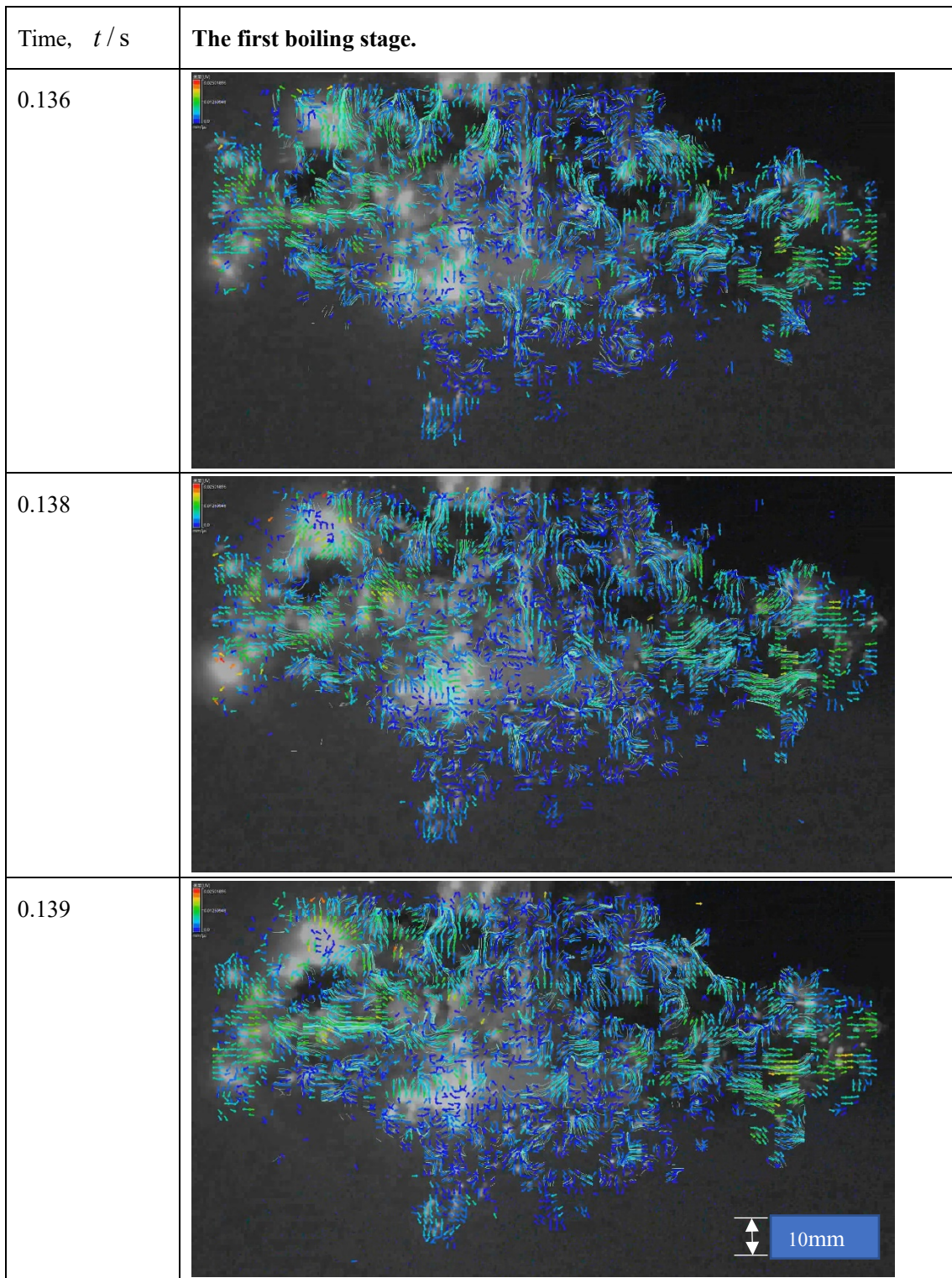


Fig. 4.9 (a) Results of PIV analysis, vector diagrams; The first boiling stage: A strong explosive flow was observed from the quenched specimen toward the surroundings with the top and bottom surfaces.



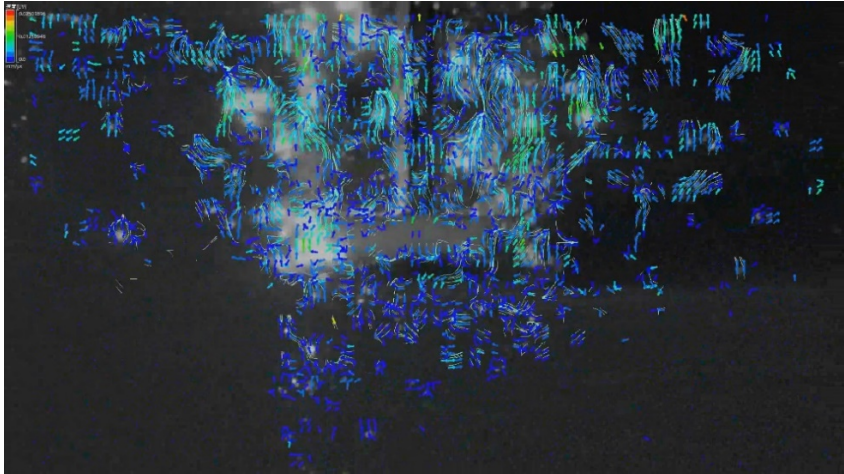
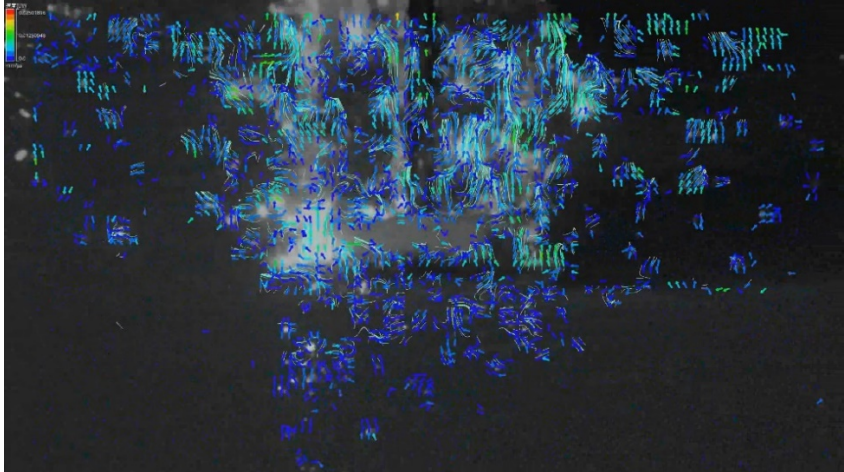
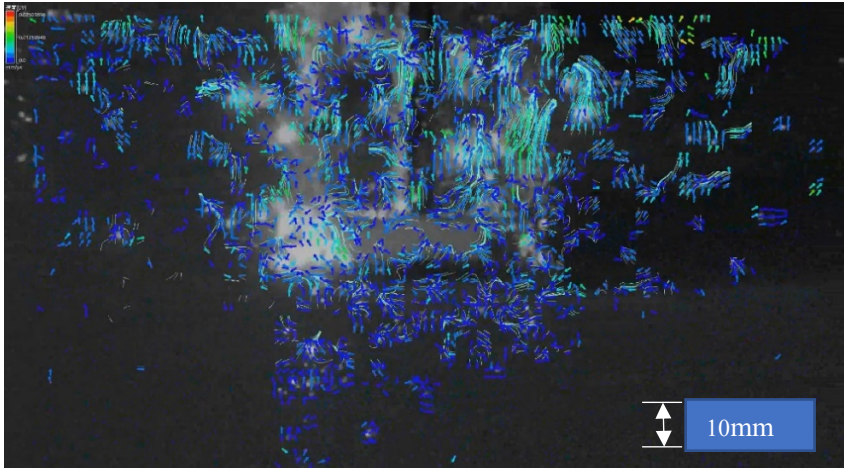
Time, $t/s$	Transition period from the first boiling stage to the film boiling stage.
0.340	
0.343	
0.346	

Fig. 4.9 (b) Results of PIV analysis, vector diagrams; On the top surface, the flow was observed to be mixed and collided each other, while on the bottom surface, the flow was small, and a space of about 1mm width was formed just below the bottom surface without any flow. The flow from the specimen to the surrounding area weakened but continued.

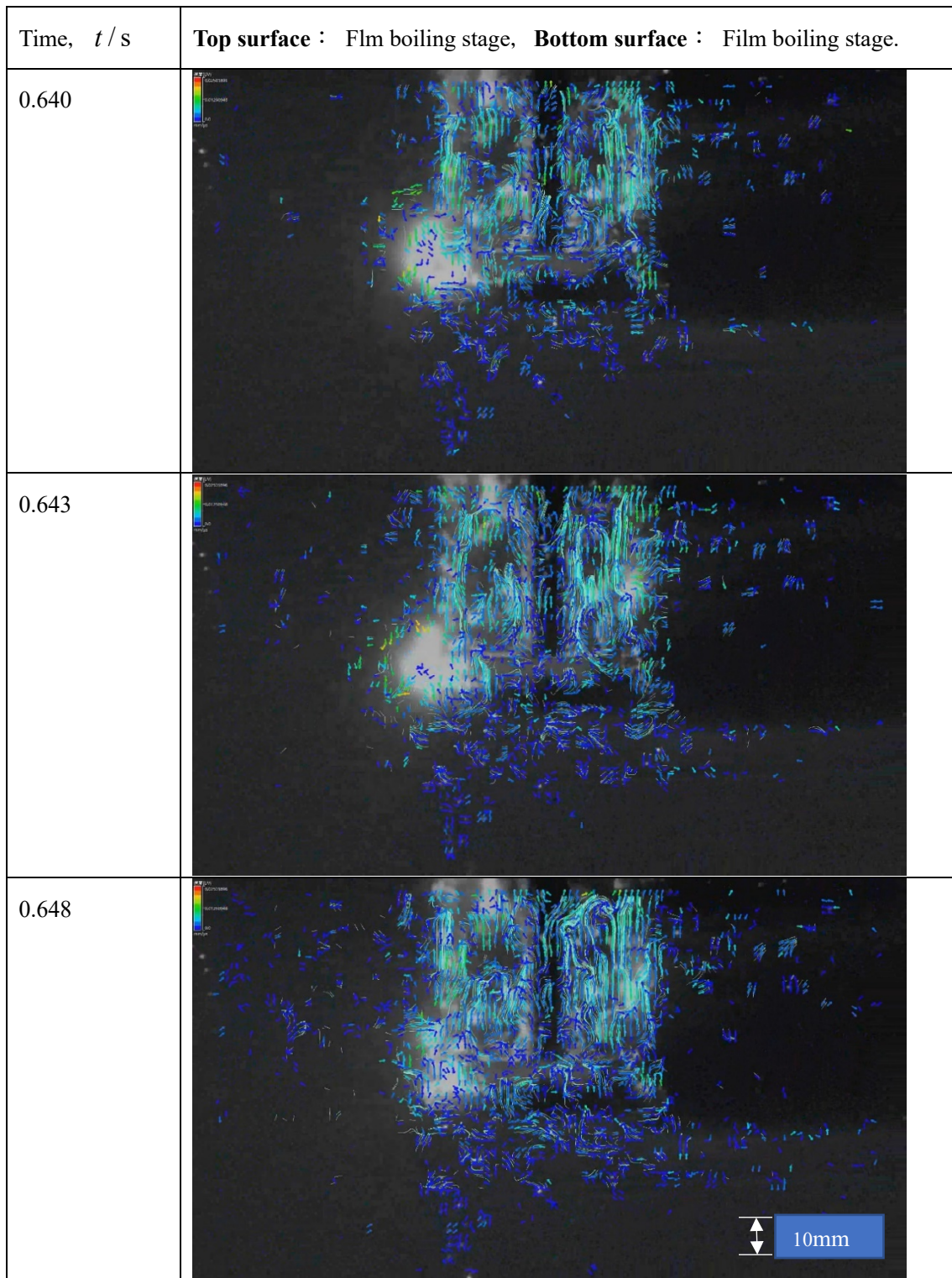


Fig. 4.9 (c) Results of PIV analysis, vector diagrams; The top and bottom surfaces of the disk specimen entered the film boiling stage. Flow from the top surface to the surrounding area decreased from Fig. 4.9(b), and the flow of collided each other also decreased. The flow on the bottom surface also decreased from Fig. 4.9(b), and the space without flow increased to about 2 mm.



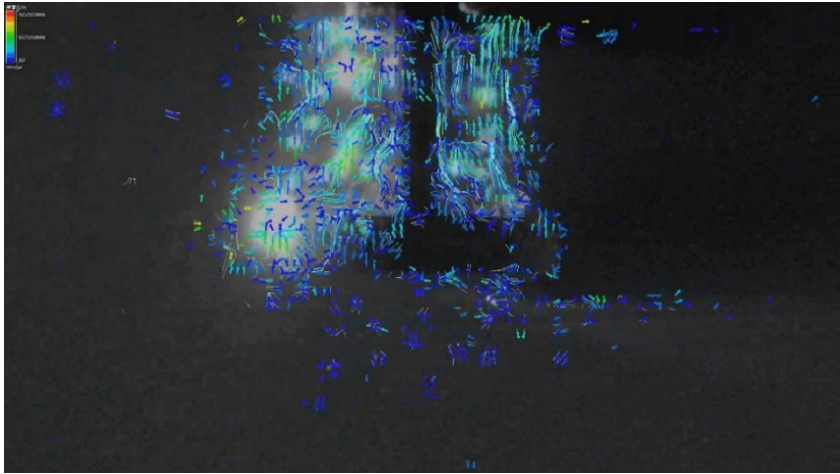
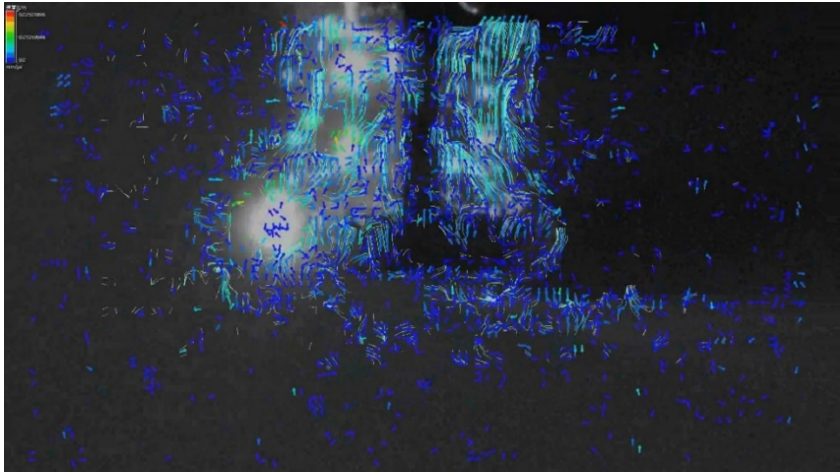
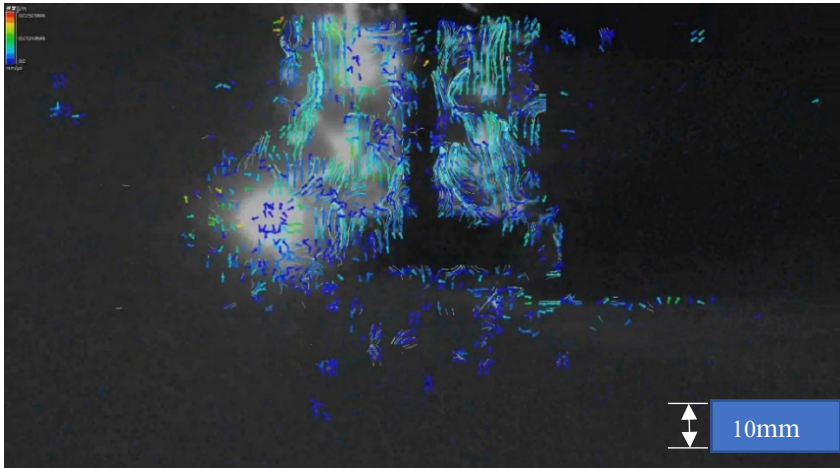
Time, $t/s$	Top surface : Nucleate boiling stage, Bottom surface : Film boiling stage.
1.3358	
1.3375	
1.3383	

Fig. 4.9 (d) Results of PIV analysis, vector diagrams; On the top surface, a large and strong upward flow and a downward flow that temporarily opposed the upward flow were observed. From the changes in the image at 0.1336, 0.3375, and 1338s, intermittent strong flow towards the periphery could be observed. On the bottom surface, the flow became even smaller than in Fig. 4.9 c), and the space without flow increased to about 10 mm in thickness.

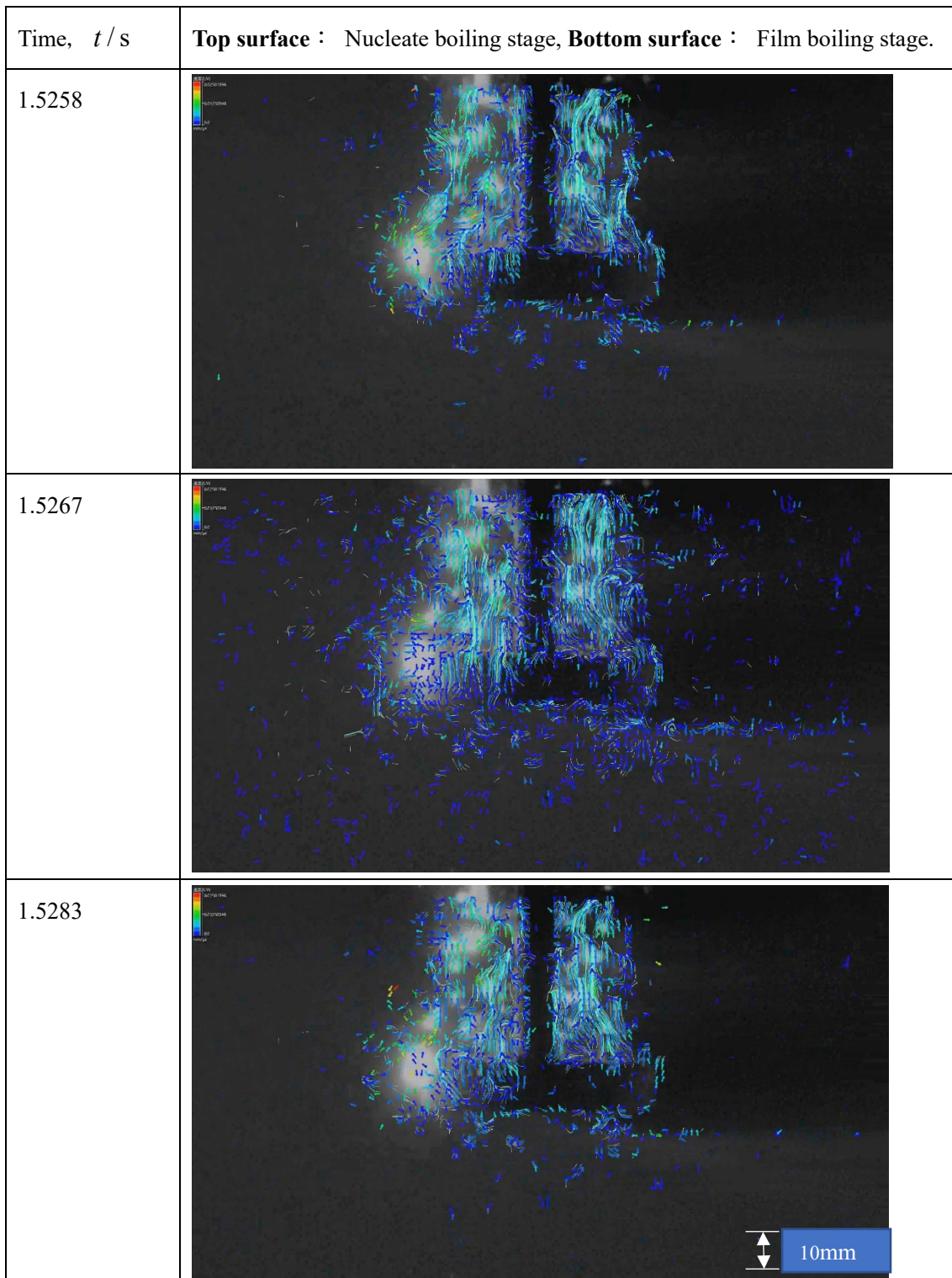


Fig. 4.9 (e) Results of PIV analysis, vector diagrams; The top surface continued to be quenched in the nucleate boiling stage, while the bottom surface continued to be cooled in the film boiling stage, similar to Fig. 4.9 (d).

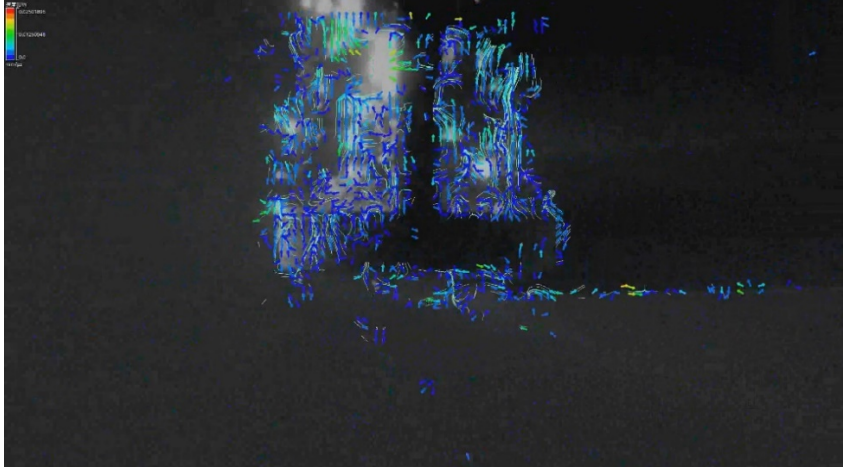
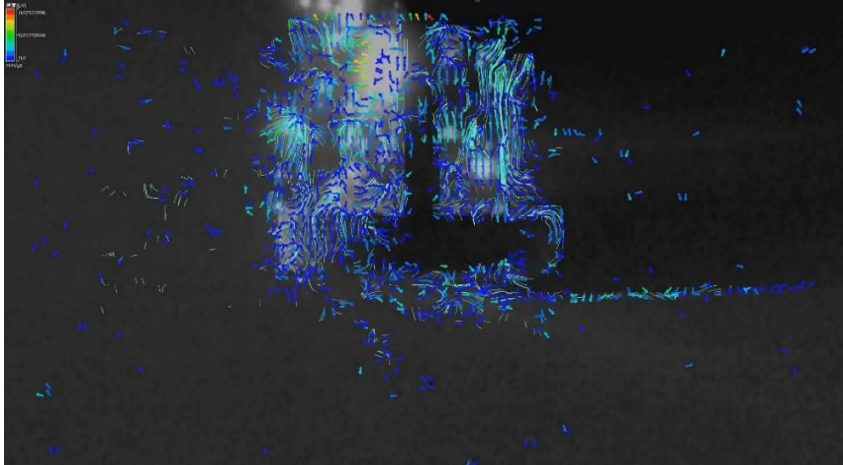
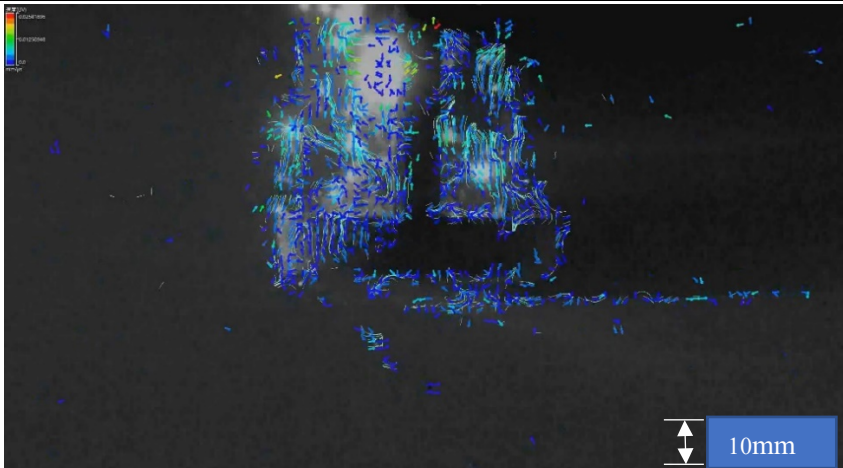
Time, $t/s$	Top surface : Nucleate boiling stage, Bottom surface : Film boiling stage.
2.7500	
2.7508	
2.75168	

Fig. 4.9 (f) Results of PIV analysis, vector diagrams; The upward flow on the top surface became smaller than Fig. 4.9(d) and Fig. 4.9(e), and the intermittent flow to the surroundings also became smaller. The bottom surface continued to be covered with a thick vapor film.

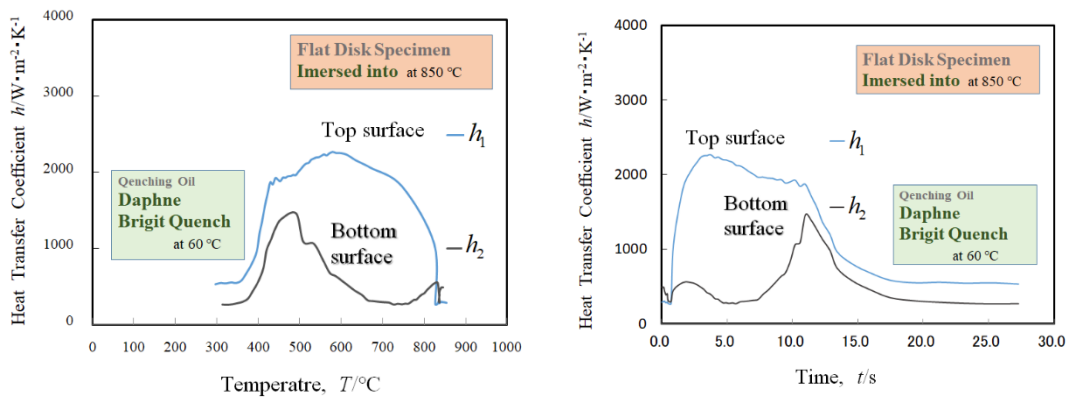


### 4.7.3 熱伝達率曲線

Fig. 4.7 の冷却曲線から、4.3 で求めた熱伝導方程式とその解を用い、Fig. 4.4 に示す手順で平行平板の上下面における温度依存熱伝達率  $h_1(T)$  と  $h_2(T)$  を同定した結果について、温度と熱伝達率の関係を Fig. 4.10 (a) に、熱伝達率の時間変化を Fig. 4.10 (b) に示す。

冷却開始後、第一沸騰段階を経て上面は Fig. 4.7 b) に示される 1.11s, 816°Cにおける特性温度を過ぎると Fig. 4.8.2 (d)に示した核沸騰により 800~400°Cの温度領域は 2000 W/(m<sup>2</sup>・K)より大きい熱伝達率  $h_1(T)$  を示す。一方下面は Fig. 4.9 (f) に示す蒸気膜が冷却開始から 12s 付近まで安定に存在し、800~400°Cの温度領域は 300~1500 W/(m<sup>2</sup>・K)の  $h_2(T)$  となる。

なお、 $h_2(T)$  の 1500 に達する熱伝達率ピークは冷却開始 12s 付近であった。上下面はやがて Fig. 4.7 の冷却曲線において 15s 以降に平行な緩冷却のカーブを描く対流段階に入ると熱伝達率も 600 以下となり両者は温度、時間に対し平行関係を維持して推移する Fig. 4.7 の傾向が Fig. 4.10 (b)にも表れている。



(a) Heat transfer coefficient  $h_1(T)$  and  $h_2(T)$  for temperature.

(b) Heat transfer coefficient  $h_1(T)$  and  $h_2(T)$  for time.

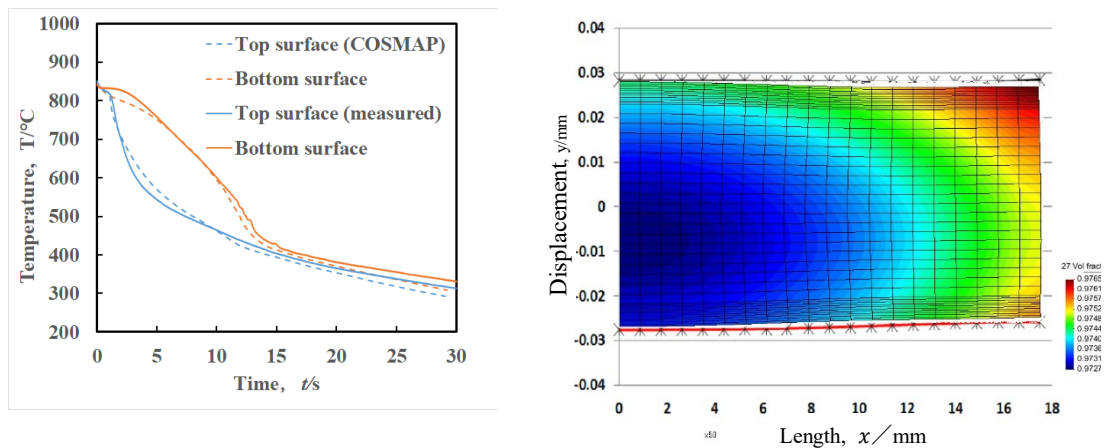
Fig. 4.10 Identified heat transfer coefficient  $h_1(T)$  and  $h_2(T)$  from the cooling curves in Fig. 4.7. <sup>7</sup>

#### 4.7.4 シミュレーション結果

上述の熱伝達係率曲線を CAE 熱処理シミュレーションコード COSMAP<sup>[3,4]</sup>に入力し、SUS304 および SCM420 材平行平板の焼入れ過程をシミュレートした結果を Fig. 4.11 に示す。シミュレーションと SUS304 の冷却曲線の測定値とを比較した結果、測定値とよく一致していることが Fig. 4.11 (a) からわかる。また、品質管理にとって重要となる SCM420 の焼入れ後の変形とひずみを予測した結果、測定とシミュレーション結果はよく一致していることが Fig. 4.11 (b) からわかる。

(1) 熱伝達率曲線を熱処理シミュレーションコード COSMAP の SUS304 鋼 2D 熱伝導解析の境界条件に入力し計算された冷却曲線は、熱伝達率曲線の同定に使用した測定値に一致した。すなわち、実験、同定分析、および計算の妥当性は確認された。

(2) 上下面で異なる冷却をされる SCM420 鋼の熱処理ひずみのシミュレーション予測が可能になった。即ち、熱処理油剤の冷却能を大きさの異なる温度や変形のフィールド情報で表すことが可能になった。



(a) Cooling curves of SUS 304 steel. (b) Quenching distortion of SCM420 steel.

Fig. 4.11 Comparison of simulation results and measured data. <sup>7</sup>

#### 4.7.5 冷却曲線と可視化観察結果の対比

Fig. 4.7の冷却曲線と Fig. 4.8の高速度カメラ, Fig. 4.9の PIV 解析, および熱伝達率曲線の Fig. 4.9 を対比すると次のようになる.

(1) 冷却開始後蒸気膜の形成前の 0.23s まで, 上下面ともに第一沸騰段階の急冷領域が冷却曲線から観察された. 高速度カメラと PIV 解析の結果, 第一沸騰段階には上下面とも流れが周囲に向かい爆発的に広がる状況が観測された. 蒸気膜は上下面ともに観察されなかった.

(2) 冷却開始 0.23s 以降, 上面は温度が 836.7°Cから 816.0°Cまで膜沸騰段階が 0.87s 間続く変化が, 一方下面は 12s まで続く膜沸騰段階が, それぞれ冷却曲線から観察された. 高速度カメラと PIV 解析の結果, 蒸気膜に覆われる 0.87s 間は上面では交錯する流れが, 下面下方は小さな流れがあるが, 中央部に厚さ 1-2mm の流れのない空間ができた. 空間は 2mm からそれ以上に厚さを増す変化がとらえられ, 蒸気膜が滞留し安定化する様子が見られた.

(3) 上面においては, 1.11 s, 816°Cで特性温度を経て核沸騰に移行する変化が冷却曲線から観察された. 高速度カメラと PIV 解析の結果, 1.11 s 以降, 上方に向かう強い流れに変化した. また, 0.001s の間隔で断続的な水平方向に広がる流れが発生していた. 核沸騰にはこのような自己攪拌流れのあることが示された. 一方下面には, 大きい流れはなく, 蒸気泡は合一することなく停滞し, 厚さ約 10mmの半透明な蒸気膜を形成した. レーザー光の当たる蒸気膜の後方には影が観察された. 対流段階に近づくと上面の流れの大きさは減少した. 下面は 12 s 以降, 冷却能が 1500W/(m<sup>2</sup>・K)上昇した. 下面の特性温度は 530°C付近にあることが冷却曲線および熱伝達率曲線から観察された.

#### 4.7.6 特性温度について

(1) 上面では特性温度が 816°C, 下面では 530°Cと観察された.

(2) 50mmの長さの円柱側面中央部では730°C, 上部, 下部では明確な特性温度は観察されない. 特に下面は800°Cで蒸気膜のない状態が観察された.

(3) 特性温度は Leidenfrost 現象に起因する現象であるが, 位置の影響を大きく受けることが明らかになった.

(4) 円柱中央部において, 39mm/s レベルの流れの影響は受けず, このような流れに対し特性温度は変化しなかった.

(5) 蒸気膜を崩壊させるには位置の制御が有効であると考えられる.

(6) 特性温度を正確に測るには最表面での測定が必要である. 今回 SUS303 において, 表面から 0.36mm 内部に入ると上面の測定温度は測定されない. 0.23mm でも変曲点は観察されなかった.

#### 4.8 結果のまとめ

(1) 側面に断熱壁を形成する形状のリング状治具で囲った円板状試験片に, リング側面から表面直下に斜め穴をあけ, シース熱電対から引き出し電気溶接した接点を銀ペーストで斜め穴先端に固定し表面温度を測定した.

X-ray 透視写真で観察したところ斜め穴は試験片中央に向かって直線的にあいており, ドリル挿入長さと角度から, 穴の先端は表面までの距離 10~20 $\mu$ m と推定された. 表面から 0.23mm, 0.39mm に比べ表面温度の変化を正確に測定できることが確認された.

(2) この方法で円板上下面冷却曲線を測定した. 上下面とも蒸気膜形成前の 0.23s まで第一沸騰段階が観測され, その後上面には蒸気膜段階が 1.11s, 816 °Cまで観察され, その後直ちに特性温度を経て核沸騰段階に至る冷却曲線となった. 一方下面は 0.23s から 10s 以上にわたり安定な蒸気膜を形成し温度が低下しにくい緩冷却の冷却曲線が得られた.

(3) 冷却曲線と同時にレーザーシート上に投影される映像をハオスピードカメラに記録し, 上面と下面の状態を観察した.

(4) 上面の核沸騰は上方に向けて連続的な強い流れが画像と PIV 解析から観測された。また水平方向にも断続的に発生する自己発生流のあることが PIV 解析の結果明らかになった。

(5) 一方下面には第一沸騰段階に続いて PIV 解析から流れのない空間が観察された。12s 以上にわたり対流し、その位置においては半透明状であるが、試験片後方にレーザー光線による膜の影が映し出された。影ができることと温度が低下しにくい事実から膜の存在が確認された。レーザービームの波長 532nm より大きいサイズの微細粒子が合一することなく分散する状態にあると推定された。

(6) 15 s 以降の対流段階は、上面と下面の冷却曲は合致し同様の緩冷却のカーブを描いた。

(7) 以上の上下面で大きく異なる冷却曲線から上下面での熱流れが大きく異なる熱伝達率曲線を同定した。

(8) 同定された上面における温度依存熱伝達率  $h_1(T)$  と下面の  $h_2(T)$  を熱処理シミュレーションコード COSMAP の SUS304 鋼 2D 熱伝導解析の境界条件に入力し、計算を行った。SUS 材の冷却曲線計算値は測定値に一致し、 $h_1(T)$ 、 $h_2(T)$  の導出過程、測定値、計算システムの正確さを証明するものとなった。熱処理油の特性について、シミュレーションによって、変形する位置情報など、フィールド情報で提供できる基盤が整った。試みに計算した鋼の熱処理変形は実測値に一致する結果となった。

第 4 章参考文献

- [1] Hideo Kanamori, and Dong-Ying Ju, *Materials Transactions*, “Identification of Heat Transfer Coefficients and Simulation of Quenching Distortions on Disk Probe”, vol.61, No.5
- [2] Dhir, V. K. : “Investigation of Mechanisms Associated with Nucleate Boiling Un Microgravity Conditions” . Proceedings of the Third Microgravity Fluid Physics Conference. NASA CP-3338, pp. 153-158 (1996)
- [3] James Jan and D. Scott MacKenzie: “On the Characterization of Heat Transfer Rate in Various Boiling Regimes Using Quenchometers and Its Application for Quenching Process Simulations”, *Thermal Processing in Motion 2018—Conference Proceedings Spartanburg, South Carolina, USA*, pp.112—123 (2018).
- [4] Mukai, R. and Ju, D. Y. “Simulation of carburizing—quenching of a cylinder. Effect of carbon content on residual stresses and distortion”, *Journal de Physique IV* (proceedings) , pp.489—497 (2004), DOI : 10.1051/jp4 : 2004120056.
- [5] Ju, D. Y., Zhang, W. M. and Zhang, Y., “Modeling and experimental verification of martensitic transformation plastic behavior in carbon steel for quenching process”, *Materials Science and Engineering A*, Vol. 438, No. 440, pp. 246—250 (2006), DOI : 10.1016/j.msea.2006.01.125

## 第5章 総論

<a href="#">5.1</a>	<a href="#">まとめ</a> .....	170
<a href="#">5.2</a>	<a href="#">今後の展望</a> .....	174

## 第5章 総論

### 5.1 まとめ

熱処理工程で用いる熱処理油（冷却剤）中に 850°C に加熱した試験片を投入し測定した冷却曲線の形状から、第一沸騰段階、蒸気膜段階、核沸騰段階、対流段階を明確に読み取ることができた。同時に熱処理油が固体表面から熱を奪う様子を高速度カメラに記録した。

また、冷却曲線から得られた温度変化の情報から試験片内部の温度分布を計算し、その境界面を通過する熱流れを熱伝達率曲線として求め（温度依存熱伝達率を同定し）、このデータを用いて実際のワーク内で起きる変化を予測する熱処理シミュレーションを行った。シミュレーションからは実際に使われる材料が熱処理されることにより、どこが変形するか、その形状、変形量、内部に生じる応力などのフィールド情報がもたらされた。高速度カメラの映像からは、冷却曲線とそれを用いて計算された熱流れを視覚的にとらえ可視化することができた。

具体的な方法と結果をまとめると次のようになる。

#### (1) 熱処理工程における熱伝達率同定とその高精度化

① 従来の JIS 銀円柱試験片による冷却曲線想定方法に対し、表面形態が鋼に類似のステンレス鋼を用い、形状は円柱に加え円板試験片を用いた冷却曲線測定方法を開発した。

② 最表面の温度を精密に測定するため次を実施した。

- ・ シース型 K 熱電対から素線を引き出し、その接点を電気溶接する。
- ・ 表面直下まであけた斜め穴先端に銀ペーストで上述接点を固定する。
- ・ 以上の円板試験片表面直下に取り付けた熱電対素線より正確な表面温度を計測する。

③ 上述の方法によって測定した冷却曲線と熱伝導方程式の解析解から逆解析によって上下面で異なる熱伝達率  $h_1(T)$  と  $h_2(T)$  を求めた。



④ この  $h_1(T)$  と  $h_2(T)$  を熱処理シミュレーションの境界条件に用い、熱伝導、変態、応力・ひずみの連成関係を解きながら進行する焼入れ工程を予測するシミュレーション計算をおこない、冷却剤の性能を生産現場におけるフィールド情報で提供できる基盤を整えた。

### (2) 冷却曲線と可視化情報の活用

冷却曲線の測定と同時に冷却過程における試験片断面をレーザーシート上に映し出し、ハイスピードカメラによってとらえる同時計測を行い、冷却剤の特性に加え、蒸気膜段階における蒸気膜やそれを取りまく液体の挙動、核沸騰段階における蒸気泡の挙動とその周囲にある液体の挙動、また蒸気膜段階から核沸騰段階に遷移するときの強制対流の影響を観察した。合わせて可視化映像から PIV 流れ解析を行った。

① 冷却曲線に対応するレーザーシートに投影される 4K 高速度カメラ映像を記録した。

② 冷却曲線と同期させた冷却挙動の可視化観察を行った。

③ 可視化映像から PIV 流れ解析を行い第一沸騰段階と核沸騰における蒸気泡の解析を行った。

### (3) 明らかになった油冷却の特徴

試験片表面が対流段階開始温度より高い場合、蒸気膜段階の前段階となる第一沸騰段階を経て、試験片表面付近の熱処理油が蒸気膜に覆われる蒸気膜段階となり、その後核沸騰状態に移行する。この様子を冷却曲線と同時に視覚的にもとらえることができた。

① 蒸気膜段階から核沸騰段階に遷移する状態において測定される特性温度は、0-39mm/s レベルの強制対流（攪拌）の影響は受けないことが、円柱試験結果から明らかになった。

② 上面における核沸騰段階では、上方へ向いた強い自己発生流が起きるが、1/1000 s ごとに水平に外に向け発生する強い流れが PIV 解析で観察された。このような自己発生流の様子を捕えることができた。自己発生流の向きが垂直に加え直角方向にも及ぶことは動画と PIV 解析で観察された。

③ 平板試験片の下面に発生する蒸気膜は滞留段階開始温度に至るまで半透明状態で停滞することが観察された。この膜を形成していると考えられる蒸気泡は極めて微細で、この微細粒子は合一することなく分散状態で停滞することが観察された。

④ この蒸気膜中の微細粒子の存在はレーザー照射の後方にできる影からも確認された。影のできる事実から微細粒子はレーザー光線の波長 532nm より大きいことが推察された。

⑤ 対流段階になると上述で観察された蒸気膜は側面からの目視観察で 1/10 ほどの大きさまで収縮し、気泡を囲む気液界面が現われ、それにレーザー光が反射して光る様子が観察され、気泡全体はななめ下から見て右回りに約 1 回/s の速度で回転している様子も観察された。

### (4) 油冷却の注意点

- ① 蒸気膜を制御できない場合、冷却むらを引き起こす可能性がある。
- ② 下面の蒸気膜の滞留する特性を制御する必要がある。

### (5) 蒸気膜内段階と核沸騰段階における冷却能の相違

円板試験片の下面には 12 s 以上にわたりこの蒸気膜が存在する状態が発生した。一方、上面の蒸気膜は 1.1 s で消え核沸騰状態に移行した。この間、異なる冷却状態が上面と下面に同時に存在し、この状況は熱伝達率曲線（温度依存熱伝達率  $h_1(T)$ ,  $h_2(T)$ ）に定量化され示された。

PIV 解析の結果、第一沸騰段階には周囲に向かい爆発的に広がる気泡の流れが観測された。また試験片上面も蒸気膜に覆われる 1.1s 間は上面では交錯する気泡の様子が、試験片下面蒸気膜下方には小さな流れがあるが、試験片直下には厚み 1mm の流れのない空間ができた。約 1 s の間に流れのない空間は 2mm から 10mm に増加しその後 12 s 以上にわたり厚みは 1~5mm 程度の変動はあるが安定して存続した。一方その間に上面における核沸騰段階では、0.001s の間隔で上述した断続的な周囲へ広がる大きい流れが発生していることが明

らかになった。核沸騰にはこのような自己攪拌効果あることが示された。対流段階に近づくとその大きさは減少した。

(6) 核沸騰における温度変動現象の観察と推定

核沸騰における蒸気泡は高速で移動するため液を攪拌する効果があり、冷却能を向上させると考えられる。さらにこれが液化すると（体積は1モルの気体なら1モルの液体にかわり）、その結果水蒸気であれば100°Cにおいて0.000598g/cm<sup>3</sup>、の密度から、99°Cの水の密度は0.95906 g/cm<sup>3</sup>であり、 $(0.598 \times 10^{-3}) / 0.95906 = 1/1603.78$ に減少する。同時に気化に必要な潜熱を582.8cal/g奪う。水の比熱はこのときほぼ1 (1.007 cal/g) で、この一瞬(100→99°C)に582.8倍の熱エネルギーを奪うことになる。水と油で具体的数値は異なるが蒸気/液体の相変化は同様に発生する。油の分子量は水の約10倍であるから液化によって体積が百分の1に減少することによる自己攪拌効果と、液化する瞬間、状態比熱の100倍以上の気化潜熱が奪われる現象は発生すると考えてよい。熱処理油の蒸気成分に覆われる蒸気膜段階ではこのような潜熱発生や自己攪拌効果は期待できないが、蒸気膜が崩壊し(蒸気膜中の微細蒸気泡粒子が合一し形成されたと推定される)小さな蒸気泡が無数に発生する核沸騰段階では蒸気泡の沸点以下温度領域への移動において、空孔発生は期待でき、その結果発生する自己発生流が液体を呼び込みそれが蒸発して気化潜熱を奪う結果、両者(蒸気膜段階と核沸騰段階では)の冷却能に大きな差が生ずることになる。

(7) 熱処理シミュレーションによる冷却むらの計算予測

上下面で大きく異なる温度依存熱伝達率 $h_1(T), h_2(T)$ を熱処理シミュレーションコードCOSMAPのSUS304鋼2D熱伝導解析の境界条件に入力し計算された冷却曲線は測定値に一致し、実験、同定手順と手法、および計算の妥当性が確認された。相変態を起こすSCM420材の円板を熱処理油(ブライトクエンチ)中に投入する「温度・応力ひずみ・組織変化の連成関係解析シミュレーション」は焼入れ実験に一致する結果となった。

冷却剤の焼入れひずみに関する性能をひずみの大きさ、発生個所などフィールド情報で提供することが可能となった。

### 5.2 今後の展望

(1) 熱処理油の生成する蒸気膜は、部品底部などに滞留する結果、冷却むらを生じ予期せぬ焼入れひずみを発生させることは周知のとおりであるが、今回のような評価手法を用いて油剤や部品の置き方の工夫改善に取り組むあらたな手法ができたと考える。

CAE環境で部品の設計・生産を行う場合の最適化手法として活用できると考える。

一方、熱処理油を含む冷却剤の開発には油剤の特性がフィールド情報に直接関係づけられるため、有効な開発手法になると考えられる。

(2) あらゆるものが繋がる時代の環境下において基礎研究と最先端技術の融合を図り現象の解析と解明、研究開発、工程の最適化のためのCAEに、報告した温度測定技術、可視化技術、シミュレーションを利用する展望が開けたと考える。

(3) 均一な冷却を実現させるためにはワークの位置を制御し核沸騰に移行させる冷却方法が有効と考えられた。位置を入れ替え、蒸気膜を停滞させない制御も有望と考えらる。熱処理油の基本特性を生かした熱処理技術の発展を願うものである。

(4) 熱力学の平衡論からは時間的変化は表せない。フーリエの熱流束の概念を用いるとこのような熱流れの解析（熱伝達率同定）が可能になる。可視化情報を加え液体プール冷却の実体を明らかにする研究を継続する予定である。

### 謝辞

本研究の遂行ならびに本論文の執筆にあたり、終始ご指導を賜りました埼玉工業大学大学院工学研究科 巨東英教授に心から感謝いたします。また当初より研究をご指導いただいた井上達雄京都大学名誉教授に深く感謝いたします。長年にわたり腐食科学をはじめとする本研究の根底をなす基礎理論をご指導いただきました辻川茂男東京大学名誉教授に感謝申し上げます。

本論文の査読及び有益なご意見を頂きました埼玉工業大学 小西克享教授，福島 祥夫教授，古谷清藏准教授に心から感謝いたします。

特に、長年にわたり研究の御指導を頂き、本論文の査読及び有益なご意見を頂きました日本パーカライジング株式会社 渡邊陽一様，埼玉工業大学先端科学技術研究所奈良崎道治客員教授，出光興産株式会社市谷克美様，加藤雅之様，本間立樹様，杉浦崇仁様，日産自動車株式会社杉本剛様に心から感謝いたします。

本研究にあたり広くご助言をいただきました熱処理技術協会 熱処理シミュレーション実用化研究部会の皆様に深く感謝いたします。

冷却実験装置の製作とメンテナンス，貴重なアドバイスをいただいた株式会社日昌エンジニアリング代表取締役田中貢様に深く感謝申し上げます。

試験片作成にご協力いただいた株式会社進藤進藤雄一様，吉田精機合同会社吉田昭弘様，株式会社テストマテリアル様に感謝申し上げます。

実験に協力してくださり，また，至らないところを補助いただいた埼玉工業大学，石川耕介博士，岩間光男君，寺田伊吹君，鎌田裕也君，駒井徹也君に感謝申し上げます。