埼玉工大紀要
No. 1 (1983)

極 限 の 種 類

野 崎 安 雄

0. 用語：用例

① almost-everywhere : ...except Lebesgue measure 0...

② approximately everywhere : ...everywhere for a set of inner capacity 0...

③ C-absolutely continuous : ...a signed measure ν will be called C-absolutely continuous if for any set K of zero capacity...

④ harmonic measure : D を z 平面内の領域，Γ をその境界とし，α を Γ 上の閉集合とする．α の上で境界値１を，$\Gamma-\alpha$ 上で境界値０をとる Dirichlet 問題の解 $\omega(z, \alpha, D)$ を α の D に関する調和測度という．この関数は Γ 上で容量０の集合を除いて α 上では 1，$\Gamma-\alpha$ 上で値０をとる．

⑤ μ-almost everywhere : ...except μ-measure zero...

⑥ quasi-everywhere : ...If something holds for all points of $\boldsymbol{R}^p$, with exception of a set of outer capacity zero...

⑦ strong convergence : ...Tne convergence of signed measures in the norm.

⑧ vague convergence : $\lim\int_F f(x)\,d\nu_n(x) = \int_F f(x)\,d\nu(x)$． F：コンパクト集合で，この収束を $\nu_n \longrightarrow \nu$ で示す．

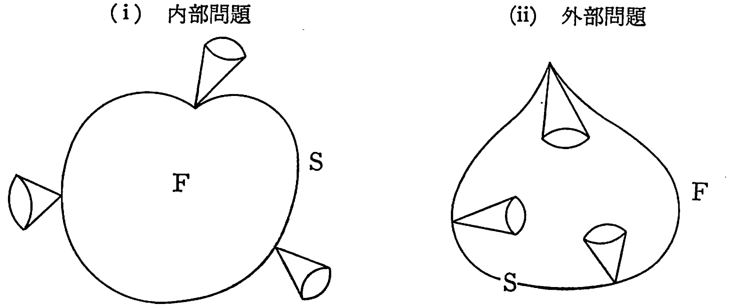
⑨ weak convergence : ...A sequence of signed measure ν_n weakly converge to ν if $(\nu_n, \lambda)\,(\nu, \lambda)$ for any $\lambda \in \varepsilon_K$...

ここで ε_K はエネルギー有限であることを示す．

Ｉ．(準備) Dirichlet 問題

Ｆを有界でその境界面Ｓ（平面の場合は境界線）を持つ領域とする．Ｓ上に連続な関数 $f(x)$ を与えて，f によって一意的に定まる調和関数を求める問題を Dirichlet 問題という．この場合，Ｆの内部問題と外部問題がある．

S上の各点においてFの外部に開きが0でない円錐（平面の場合は角)が画けるとき集合Fは Dirichlet 問題に対して正則な領域という．



II．　導体Fの容量とはFに電荷を与えたとき，それが平衡状態にあるとき，電気量とその導体Fの表面におけるポテンシャルの値との比で，その容量を C(F) で表わす.

III．　他方においてコンパクトな集合Fの超越直径を $d(F)$ で示す.

ここで，$d_n(F)=\mathrm{Max}\sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<j} \overline{P_iP_j}}$ とおく。P_iP_j はFに属する2点 P_i と P_j の距離を示す。このとき，

$d_n(F) \leqq d_{n+1}(F) \leqq$（集合Fの2点間の最大距離）であるから

$$\lim_{n\to\infty} d_n(F)=d(F)$$

が存在する. $d(F)$ を集合 F の超越直径という.

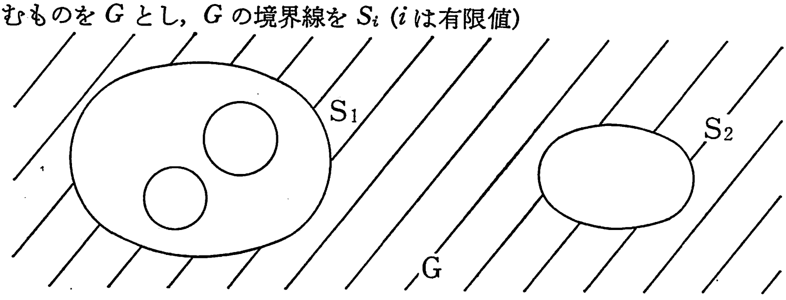
定理　領域 F が正則ならば

$$C(F)=d(F)$$

である.

IV．　Z 平面の場合

Z 平面上の有界閉集合を平面から取り除いた残りの領域のうち，∞を含むものを G とし，G の境界線を S_i (i は有限値)



F に関する Green 関数 $g(z)$ は∞を除いて調和で∞の近傍で

$$g(z)=\log|z|+u(z) \tag{1}$$

とおく．ここで $u(z)$ は∞においても調和である．したがって G においても調和である．(1) において z が G の中から境界 S_i の点に近づくとき

$$g(z)\longrightarrow 0$$

となる．そこで，

$$-u(\infty)=\lim\{\log|z|-g(z)\}=\log\gamma \tag{2}$$

が存在する．この γ を Robin の定数という．または閉集合 F の容量という．すなわち

$$\gamma=C(F)$$

である．

V．次に任意の集合 E に対して $F\subset E$ なる閉集合を F, また $F\subset O$ なる開集合 O を考え，

(i) $C^i(E)=\sup(C(F))$

(ii) $C^e(E)=\inf(C^i(O))$

とおく．$C^i(F)$ および $G^e(E)$ をそれぞれ E 集合の内容量および外容量と呼ぶ．一般には $C^i(E)\leqq C^e(E)$ である．特に $C^i(E)=C^e(E)$ であるとき，E は可容であるといって，その共通の値を E の容量といって $C(E)$ で表わす．

Ⅵ．以上で②，⑥の意味がわかる．

調和測度は容量0の集合を除いて決定されるから，もちろん μ 測度は0となる．

よって Lebesgue 積分で測度0の集合を積分範囲に加減してもその値が変わらないことに似た性質を持っている．

F をコンパクトな集合，μ を測度とする．

対数ポテンシャル (R^2 の場合) $U(p)=\int_F \log\frac{1}{r_{PQ}}d\mu(Q)$

(R^3 の場合) $U(p)=\int_F \frac{1}{r_{PQ}}d\mu(Q)$

エネルギー積分

$$K(P,\ Q)=\begin{cases}\log\dfrac{1}{r_{PQ}}\ (R^2)\\[2ex] \dfrac{1}{r_{PQ}}\ (R^3)\end{cases}$$

とおくとき，

$$I[\mu]=\iint_F K(P,\ Q)\,d\mu(P)\,d\mu(Q)$$

相互エネルギー

$$I[\mu,\ \nu]=\iint_F K(P,\ Q)\,d\mu(P)\,d\nu(Q)$$

参 照

Nevanlinna, Eindeutige Analytisch Funktionen, Springer in Berlin, 1936.

N.S. Landkof, Generalized Functiods, Englewood CLIHO N.J., 1972.

N.S. Landkof, Potential theory, Ndw York, 1972.

ОСНОВы, СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЧАПА, МОСКВА, 1966.

J. Arsac, Transformations de Fourier et theorie des distributions, Dunford Editeur, Paris, 1961.

数学辞典，岩波書店，1971.

辻正次，複素関数論，槇書店，1971.

辻正次&弥永昌吉，現代の数学，共立出版，1950.