埼玉工大紀要
No. 1 (1983)

近似分数の分母に $ax+b$ 型の数が無限に多く現われる超越数について

岡　野　　武

§1. 序

まず，実数 α の近似分数を p_n/q_n とする．次のことはよく知られている．‘ほとんどすべての実数 α について，$a\geqq 2$, $0\leqq b\leqq a-1$ をみたす任意の整数 a, b に対して，$q_n\equiv b \pmod a$ となる n が無限に多く存在する．’［5］において，上の条件をみたす α を実際に構成し，それらすべてから成る集合が非可算集合であることを示した．この小論では上の条件をみたす α のうち，特に超越数であるものを構成する．

§2. 記号の定義

$(A_a^{(f)})$ は自然数を一定の順序で並べた数列であるとし，次のように定める．

$(A_2^{(1)})=(1, 1, 2, 1)$

$(A_a^{(f)})=(c_a^{(f)}, 1, a, Q_a^{(f)}, a, Q_a^{(f)}, \cdots, a, Q_a^{(f)}, P_a^{(f)})$

$((a, f)\neq(2, 1))$

ここで，$(P_a^{(f)})$ は 1 または a の素因数の積から成る数列とする．$(A_a^{(f)})$ に含まれる元の個数を $p(a, f)$ で表す．また，$c_a^{(f)}$ と $Q_a^{(f)}$ を定めるために次のような実数 α を考察する．

$\alpha=[0, *, \cdots, *, A_{a'}^{(f')}, A_a^{(f)}, *, \cdots]$

$(A_a^{(f)})$ の各項に対応する α の近似分数の分母を初項から順に次のようにおく．

$q_1^{(a,f)}, \cdots, q_{p(a,f)}^{(a,f)}$

ここで，$q_{p(a,f)}^{(a,f)}$ は a と互いに素であるとする．$(A_a^{(f)})$ から $(P_a^{(f)})$ を除いた $(A_a^{(f)})$ の末項に対応する α の近似分数の分母が a と互いに素のとき，

$\{P_a^{(f)}\}=\phi$

であるとする．また，

$$q_1{}^{(a,f)} \equiv c_a{}^{(f)} q_{p(a',f')}^{(a',f')} + q_{p(a',f')-1}^{(a',f')} \equiv 1 \pmod a$$

$$Q_a{}^{(f)} \equiv q_{p(a',f')}^{(a',f')} \pmod a$$

であると定める．さらに，

$$\{q_1{}^{(a,f)},\ \cdots,\ q_{p(a,f)}^{(a,f)}\} \equiv \{0,\ 1,\ \cdots,\ a-1\} \pmod a$$

であるとする．

§ 3.　定理

［1］と［5］により，次の定理が示される．

定理. $\alpha=[0,\ A_2{}^{(1)},\ A_3{}^{(1)},\ A_2{}^{(2)},\ A_3{}^{(2)},\ A_4{}^{(1)},\ A_2{}^{(3)},\ A_3{}^{(3)},\ A_4{}^{(2)},\ A_5{}^{(1)},\ A_2{}^{(4)},\ \cdots]$ とし，aは任意の自然数 $(a\geqq 2)$ で，bは 0, 1, 2,…, $a-1$ のうちの任意の１つとする．任意に１つとった自然数 $d(d\geqq 2)$ に対して，$(A_d{}^{(f)})$ において，$(d,\ Q_d{}^{(f)})$ は $\lambda_d{}^{(f)}$ 回現われるものとし，最初の d の項の番号を $n_d{}^{(f)}$ とおく．$\lambda_d{}^{(f)}$ と $n_d{}^{(f)}$ は次の条件をみたすものとする．

$$\lim_{f\to\infty}\frac{(\log\lambda_d{}^{(f)})\,(\log n_d{}^{(f)})^{1/2}}{n_d{}^{(f)}}=\infty$$

そのとき，α は超越数であり，

$$q_n \equiv b \pmod a$$

をみたすnが無限に多く存在する．

文　　献

［1］ A. Baker, Continued fractions of transcendental numbers, Mathematatika, **9** (1962), 1—8.

［2］ R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, Khintchine's problem in metric diophantine approximation, Duke Math. J., 8 (1941), 243—255.

［3］ P. Erdös, On the distribution of convergents of almost all real numbers, J. Number Theory, **2** (1970), 425—441.

［4］ S. Hartman and P. Szüsz, On congruence class of denominators of convergents, Acta Arithemetika, **VI** (1960), 179—184.

［5］ 岡野　武，近似分数の分母に $ax+b$ 型の数が無限に多く現われる実数について，数学，**35** (1983)，177—179.