埼玉工大紀要
No. 1 (1984)

トーラス及び nilmanifold 上の双曲型自己準同型写像の周期点について

佐藤　俊

序.

微分可能な力学系の例として，Morse-Smale 力学系とともに，Anosov 力学系が代表的なものとしてよく知られ，多くの結果が得られている．後者では，A. Manning [3] によって，infranilmanifold 上の Anosov 微分同相写像は全て，双曲型自己同型写像 (hyperbolic infranilmanifold automorphism；以下 Hyp. Auto. と略す.) に位相共役であることがわかり双曲型写像の重要さが認識されるようになった．その証明の中で主要な役割を果たしたのが J. Franks [2] の Π_1-diffeo. という概念であった．さらに J. Franks は同じ論文の中で，双曲型自己準同型写像 (hyperbolic endomorphism；以下 Hyp. Endo. と略す.) の定義を述べ，Π_1-covering という概念を示した．著者は修士論文において，Π_1-covering に関するいくつかの結果を得たが，ここでは T. Banchoff と M. Rosen [1] がトーラス $\mathbf{T}^n$ と nilmanifold 上の Hyp. Auto. の周期点を具体的な形で述べたのにならい $\mathbf{T}^n$ 上の Hyp. Endo. の周期点について調べ，$\mathbf{T}^n$ 上に稠密に存在することを示す．又 nilmanifold 上の Hyp. Endo. の例を作り，それらの周期点について十分条件を上げる．

1.

まず，[2] に従って $\mathbf{T}^n$ 上の Hyp. Endo. を定義する．

定義　$\bar{f}$ を $GL(n, R) \cap M(n, \mathbf{Z})$ からえらぶ．標準的な商空間への写像 $p: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{T}^n \cong \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ を考えると $\bar{f}$ から自然な方法で $\mathbf{T}^n$ 上の写像 f がえられ，次の図を可換にする．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbf{R}^n \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbf{T}^n & \xrightarrow[f]{} & \mathbf{T}^n \end{array}$$

このとき，$\bar{f}$ が絶対値1の固有値をもたないとき f をトーラス上の双曲型自己準同型写像とよぶ.

ここで，$\mathbf{T}^n$ 上の点を $[x]$ で表わすことにする．但し，x は $\mathbf{R}^n$ の点で，$[x]=p(x)$ となるものとする．まず，必要条件として次がわかる．

補題 1. ([1]) もし $[x]$ が f の周期点なら，即ちある自然数 m があって $f^m[x]=[x]$ となるなら $x \in Q^n$ である．

証明. $f^m[x]=[x]$ より明らかに $(\bar{f}^m-I)x \in \mathbf{Z}^n$. $\bar{f}$ の固有値より $\det(\bar{f}^m-I) \neq 0$ だから，$x \in (\bar{f}^m-I)^{-1}\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Q}^n$. (証明終)

そこで，この節ではこれ以降 $x \in \mathbf{Q}^n$ とし，x の各成分は既約分数で書かれているとしても一般性を失わない．ここで，

$d=\det\bar{f}$，$r=$ "x の各成分の分母の最小公倍数"

としておく．今，$\Phi_r : \mathrm{M}(n, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{M}(n, \mathbf{Z}_r)$ を，各成分を法 r の剰余環に写すことによって得られる環準同型とし，$\Phi_r(A)=A_r$ とかく．このとき，

$$\Phi_r(\{A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{Z}) \mid \det A \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, r)\})=\{A_r \in \mathrm{M}(n, \mathbf{Z}_r) \mid \det A_r=1\}$$

となるが，これを $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z}_r)$ と表わすと，これは有限乗法群である．(付録)

さて，周期点であるための十分条件を次の補題で調べる．

補題 2. $(d, r)=1$ なら $[x]$ は周期点.

証明. $(d, r)=1$ という仮定から Fermat の小定理を使える．即ち，r を素因数分解して，$r=P_1^{\lambda_1}P_2^{\lambda_2}\cdots P_k^{\lambda_k}$ となったとすると，Euler の関数 $\phi(r)=r\prod_{i=1}^{k}(1-1/P_i)$ を用いて，$d^{\phi(r)} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, r)$ となる．そこで $\bar{g}=\bar{f}^{\phi(r)}$ とすると，$\det\bar{g} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, r)$ であり，従って $\bar{g} \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{Z}r)$. 有限乗法群の性質より自然数 m が存在して，$\bar{g}_r{}^m=I_r$ とすることができる．従って $\Phi_r(\bar{g}^m-I)=\bar{g}_r{}^m-I_r=O_r$ となり，$\bar{g}^m-I$ の各成分は r の倍数となる．よって $(\bar{g}^m-I)(x) \in \mathbf{Z}^n$ 即ち $f^{m\phi(r)}[x]=[x]$. (証明終)

以上の結果から，この節の主目的である次の定理が得られる．ここで f の周期点の集合を $\mathrm{Per}(f)$ であらわす．

定理 $f : T^n \longrightarrow T^n$ が Hyp. Endo. なら $\mathrm{Per}(f)$ は T^n で稠密.

証明. $[x] \in T^n$ を任意の点とし，$\varepsilon>0$ をかってにえらんだとき，$x \in \mathbf{R}^n$ の ε 近傍に周期点が存在することを示せば十分である．まず，$1/r<\varepsilon/\sqrt{n}$ なる素数 r をえらぶ．つぎに x の各成分について，$|x_i-n_i/r|<\varepsilon/\sqrt{n}$ となるような整数 n_i をえらべば $(n_{i1}/r, \cdots, n_n/r)$ なる点は x の ε 近傍の点で，補題2. より周期点である．(証明終)

系1.　非遊走点の集合 $\Omega(f)=T^n$.

証明. $\Omega(f)\supset\mathrm{Per}(f)$ かつ $\Omega(f)$ は閉集合であることより明らか．(証明終)

注意　1. 補題 1. の条件は，十分条件ではない．

$\bar{f}=\begin{pmatrix}4&1\\1&1\end{pmatrix}$ としたとき，$x=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}$

なる点は $\bar{f}(x)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ となり，T^n 上では，点 $f[x]$ は不動点である．従って，$[x]$ は周期点でない．

注意　2. 補題 2. の条件は，必要条件ではない．上の $\bar{f}$ を使うと，$\det\bar{f}=3$ だが $x=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$ なる点は $f^2[x]=[x]$.

2.

やはり［2］に従って nilmanifold 上の Hyp. Endo. を定義することからはじめる．

定義　$\bar{f}$ を単連結ベキ零リー群 G 上の自己同型とする．Γ を G の一様離散部分群とし $\bar{f}(\Gamma)\subset\Gamma$ となったとする．ここで標準的な商空間への写像 $p:G\to G/\Gamma$ を考えると $\bar{f}$ から自然な方法で nilmanifold G/Γ 上の自己準同型写像 f が得られ，次の図を可換にする．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & G \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{G}/\Gamma \arrow[r, "f"'] & \mathrm{G}/\Gamma \end{tikzcd}$$

このとき G の単位元 e における $\bar{f}$ のリー微分が絶対値 1 の固有値をもたないとき f を nilmanifold 上の双曲型自己準同型写像とよぶ．

上で $\bar{f}(\Gamma)=\Gamma$ となるとき f は Hyp. Auto. となるがその具体的な例を S. Smale［4］が作っている．ここでは，そこで上げられたリー群を利用して Hyp. Endo. の例を作ってみた．

実 6 次元リー群 G の元 X は，

(1)　$X=\begin{pmatrix}X_1&0\\0&X_2\end{pmatrix}$; $X_i=\begin{pmatrix}1&x_i&z_i\\0&1&y_i\\0&0&1\end{pmatrix}$ $(i=1,\ 2)$

そのリー環 $\mathfrak{g}$ の元 A は，

$$(2)\quad A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix};\ A_i=\begin{pmatrix}0 & a_i & c_i\\ 0 & 0 & b_i\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ (i=1,\ 2)$$

と表わされるとする.

更に ϑ の格子 Γ_0 の元 A を(2)で $a_i,\ b_i,\ c_i\in\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ かつ Galois 自己同型 $\sigma:\mathbf{Q}(\sqrt{3})\to\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $(p+q\sqrt{3})^\sigma=p-q\sqrt{3}$ を用いて, $a_2=a_1{}^\sigma$, $b_2=b_1{}^\sigma$, $c_2=c_1{}^\sigma$ となるものとする. 即ち

$$(3)\quad A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_1{}^\sigma\end{pmatrix};\ A \text{ の成分は } \mathbf{Z}[\sqrt{3}] \text{ の元}$$

このとき, $\exp:\vartheta\to G$, $\exp A=\sum_{m=0}^{\infty}A^m/m!$ によって Γ_0 はGの一様離散部分群 $\Gamma=\exp(\Gamma_0)$ に写される. $X=\exp A$ を具体的に求めると, $X_1=\exp A_1$ として

$$(4)\quad X=\begin{pmatrix}X_1 & 0\\ 0 & X_1{}^\sigma\end{pmatrix};\ X_1=\begin{pmatrix}1 & a_1 & c_1+a_1b_1/2\\ 0 & 1 & b_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

と表わされる. 逆に exp の逆写像

$\log:G\to\vartheta$ によって Γ の元 X は Γ_0 の元 $A=\log X$ に写され, $A_1=\log X_1$ として

$$(5)\quad A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_1{}^\sigma\end{pmatrix};\ A_1=\begin{pmatrix}0 & x_1 & z_1-x_1y_1/2\\ 0 & 0 & y_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と表わされる. このとき(3)より, $X\in\Gamma$ とは

$$(6)\quad \begin{aligned}&x_1=x_2{}^\sigma\in\mathbf{Z}[\sqrt{3}],\ y_1=y_2{}^\sigma\in\mathbf{Z}[\sqrt{3}]\\ &z_1-x_1y_1/2=(z_2-x_2y_2/2)^\sigma\in\mathbf{Z}[\sqrt{3}]\end{aligned}$$

となることと同じである.

以上の群Gとその一様離散部分群Γからコンパクトな nilmanifold G/Γ が得られる. 次に Hyp. Endo. を構成すると,

例

$\lambda=6+3\sqrt{3}$ とする. 次の(7)で定まる ϑ 上の一次変換 F を考える.

$$(7)\quad \begin{array}{ll} a_1\longrightarrow\lambda a_1 & a_2\longrightarrow\lambda^\sigma a_2\\ b_1\longrightarrow\lambda^2 b_1 & b_2\longrightarrow(\lambda^\sigma)^2 b_2\\ c_1\longrightarrow\lambda^3 c_1 & c_2\longrightarrow(\lambda^\sigma)^3 c_2\end{array}$$

この一次変換によってリー群 G 上に自己同型 $\bar{f}:G\to G$ が定まり, 更に $\bar{f}(\Gamma)\subset\Gamma$ となる. 何故なら(7)と exp より, $\bar{f}$ の変換は次の(8)で定まる. 具体的に $\exp\circ\mathrm{F}\circ\log$ を計算すると,

$$
(8)\quad
\begin{array}{ll}
x_1 \longrightarrow \lambda x_1 & x_2 \longrightarrow \lambda^\sigma x_2 \\
y_1 \longrightarrow \lambda^2 y_1 & y_2 \longrightarrow (\lambda^\sigma)^2 y_2 \\
z_1 \longrightarrow \lambda^3 z_1 & z_2 \longrightarrow (\lambda^\sigma)^3 z_2
\end{array}
$$

そこで $X\in\Gamma$ をとると，$\bar{f}(X)$ の成分が(6)を満たすからである．即ち，

$$(\lambda^\sigma x_2)^\sigma = \lambda x_2^\sigma = \lambda x_1 \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}]$$

$$((\lambda^\sigma)^2 y_2)^\sigma = \lambda^2 y_2^\sigma = \lambda^2 y_1 \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}]$$

$$((\lambda^\sigma)^3 z_2 - \lambda^\sigma x_2 (\lambda^\sigma)^2 y_2/2)^\sigma = \lambda^3 (z_1 - x_1 y_1/2) \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}]$$

よって $\bar{f}(X)\in\Gamma$. しかしながら，$\lambda^{-1}=(2-\sqrt{3})/3\notin\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$だから$\bar{f}(\Gamma)\subsetneqq\Gamma$ となり，(7)で $\lambda>1>\lambda^\sigma>0$ より次の補題が得られる．

補題 3.　$\bar{f}$ から G/Γ 上にひきおこされる写像 f は双曲型自己準同型写像となる．

ここで前節と同様に G/Γ の点を $[X]$ で表わすことにする．即ち $X\in G$ で，$[X]=p(X)$ とする．やはり必要条件として次がわかる．

補題 4.　もし $[X]$ が f の周期点なら

$$X=\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1^\sigma \end{pmatrix};\ X \text{ の成分は } \mathbf{Q}(\sqrt{3}) \text{ の元}$$

となる．

証明. $[X]$ が周期点とするとある自然数 m があって，$f^m[X]=[X]$, 即ち $X^{-1}\bar{f}^m(X)\in\Gamma$ となる．今，$Y=X^{-1}\bar{f}^m(X)=\begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}$ として Y_1 の成分を調べると

$$Y_1=\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & z_1+x_1y_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^m x_1 & \lambda^{3m} z_1 \\ 0 & 1 & \lambda^{2m} y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & (\lambda^m-1)x_1 & (\lambda^{3m}-1)z_1-(\lambda^{2m}-1)x_1y_1 \\ 0 & 1 & (\lambda^{2m}-1)y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同様に

$$Y_2=\begin{pmatrix} 1 & ((\lambda^\sigma)^m-1)x_2 & ((\lambda^\sigma)^{3m}-1)z_2-((\lambda^\sigma)^{2m}-1)x_2y_2 \\ 0 & 1 & ((\lambda^\sigma)^{2m}-1)y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $Y\in\Gamma$ となるためには (6) より，

$$
(9)\quad
\begin{array}{l}
(((\lambda^\sigma)^m-1)x_2)^\sigma = (\lambda^m-1)x_2^\sigma = (\lambda^m-1)x_1 \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}] \\
(((\lambda^\sigma)^{2m}-1)y_2)^\sigma = (\lambda^{2m}-1)y_2^\sigma = (\lambda^{2m}-1)y_2 \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}]
\end{array}
$$

又，第三式を整理すると

$$(10)\quad (((\lambda^\sigma)^{3m}-1)z_2-((\lambda^\sigma)^{2m}-1)((\lambda^\sigma)^m+1)x_2y_2/2)^\sigma$$

$$=(\lambda^{3m}-1)z_2^\sigma-(\lambda^{2m}-1)(\lambda^m+1)x_2^\sigma y_2^\sigma/2)$$
$$=(\lambda^{3m}-1)z_1-(\lambda^{2m}-1)(\lambda^m+1)x_1y_1/2\in\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$$

前の二式より $x_2^\sigma=x_1$, $y_2^\sigma=y_1$ したがって後より $z_2^\sigma=z_1$. 一方 $\lambda^m\in\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ より x_1, y_1, $z_1\in\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ も分かる. (証明終)

そこで, この節でもこれ以降 $X\in G$ を

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & 0\\ 0 & X_1^\sigma\end{pmatrix};\ X \text{ の成分は } \mathbf{Q}(\sqrt{3}) \text{ の元}$$

とし各成分は既約分数で書かれているとする. 又 r を X の各成分の分母の最小公倍数としておくと, 補題 2 の系として次の周期点であるための十分条件が得られる.

定理 2. $(r, 3)=1$ なら $[X]$ は周期点.

証明. まず $\phi:\mathbf{Q}(\sqrt{3})\longrightarrow M(2, \mathbf{Q})$, $\phi(a+b\sqrt{3})=\begin{pmatrix}a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}$ なる準同形を考える. このとき $\lambda=6+3\sqrt{3}$ に対し

$$\phi(\lambda)=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 9 & 6\end{pmatrix}\in GL(2, \mathbf{R})\cap M(2, \mathbf{Z})$$

で固有値が $\lambda>1>\lambda^\sigma>0$ となり又 $\det(\phi(\lambda))=9$ となることから, 前節補題 2 の証明と同様に, ある自然数 m があって $\phi(\lambda)^m-I$ の各成分が $2r^2$ の倍数となるようにできる. このとき,

$$\phi(\lambda)^m-I=\phi(\lambda^m-1)$$

だから $\lambda^m-1=p+q\sqrt{3}$ で p, q が $2r^2$ の倍数となる. $\lambda^{2m}-1$ も $\lambda^{3m}-1$ も λ^m-1 で割れるので $[X]$ の成分は(9), (10)を満たし, $f^m[X]=[X]$ となる. (証明終)

付録

$$\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z}_r)=\{A_r\in\mathrm{M}(n, \mathbf{Z}_r)\mid\det A_r=1\}$$
$$=\Phi_r(\{A\in\mathrm{M}(n, \mathbf{Z})\mid\det A\equiv1\ (\mathrm{mod}\,r)\})$$

が有限乗法群であることについて.

《乗法》 A, $B\in\mathrm{M}(n, \mathbf{Z})$ で $\det A\equiv\det B\equiv1$ $(\mathrm{mod}\,r)$ なら
$\det AB\equiv1$ $(\mathrm{mod}\,r)$

《単位元》 $I_r\in\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ が単位元.

《逆元》 $A\in\mathrm{M}(n, \mathbf{Z})$ で $\det A\equiv1$ $(\mathrm{mod}\,r)$ とする. $A=(a_{ik})$ に対し A の逆行列は a_{ik} の余因数 A_{ik} を用いて, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(A_{ki})$ と表わされる.

$B=(A_{ki})=\det A\cdot A^{-1}$ とすると，a_{ik} が全て整数だから A_{ki} も整数.
即ち，$B\in \mathrm{M}(n,\ \mathbf{Z})$．さらに $\det B$ は $\det A$ の相反行列式であるから

$$\det B=(\det A)^{n-1}\equiv 1 \pmod r$$

従って $B_r\in \mathrm{SL}(n,\ \mathbf{Z}_r)$．このとき $AB=BA=\det A\cdot I$ より，

$$A_rB_r=B_rA_r=I_r.$$

《結合法則》は明らか.

一方 $\#\mathrm{M}(n,\ \mathbf{Z}_r)=r^{n^2}>\#\mathrm{SL}(n,\ \mathbf{Z}_r)$ より $\mathrm{SL}(n,\ \mathbf{Z}_r)$ は有限群である.

文献

[1] T. Banchoff & M. Rosen, Periodic points of Anosov diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., 14 (1970), 17–21.

[2] J. Franks, Anosov diffemorphisms, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., 14 (1970), 61–93.

[3] A. Manning, There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, Amer. J. Math,, 96 (1974), 422–429.

[4] S. Smale, Differentiable dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747–817.