

# 二重解領域における衝撃波の正常反射の安定性

小林 晋, 足立 孝

埼玉工業大学工学部機械工学科

kobayasi@sit.ac.jp, adachi@sit.ac.jp

## Stability of Regular Reflection in Dual-Solution Domain

Susumu KOBAYASHI and Takashi ADACHI

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Saitama Institute of Technology

### Abstract

When a plane shock wave impinges obliquely on a wedge, a regular reflection (RR) or a Mach reflection (MR) occurs depending on an angle  $\theta_w$  of the wedge and an incident shock Mach number  $M_i$ . There are domains in the parameter space  $(M_i, \theta_w)$ , where both reflections are theoretically possible. These domains are called dual-solution domains. Nevertheless, experiments in shock tubes demonstrate that only regular reflection is generally realized. In the present article, we explain the background of the problem and discuss the stability of regular reflection based on our recent experimental results.

**Key Words:** Shock Wave, Oblique Shock Reflection, Dual-solution Domain, Regular Reflection, Mach Reflection

### 1. 序 論

マッハ数  $M_i$  で伝播する平面衝撃波が進行方向に対して角  $\theta_w$  をなす斜面に入射すると、正常反射 (RR) あるいはマッハ反射 (MR) のいずれかの反射形態が起きる。正常反射は入射波  $i$  が直接斜面上の点  $R$  (反射点と呼ぶ) から反射して、入射波と反射波  $r$  の2つの衝撃波から成る反射形態であり、マッハ反射は入射波が反射面に到達せず、入射波と斜面を結ぶマッハステムと呼ばれる衝撃波  $m$  が発生し、入射波とマッハステムの交点  $T$  (これを三重点と呼ぶ) から反射波が発生する反射形態である (Fig. 1)。どちらの反射形態になるかは、入射衝撃波

マッハ数  $M_i$  と斜面傾斜角  $\theta_w$  および媒質の比熱比  $\kappa$  によって定まる<sup>1,2)</sup>。入射衝撃波マッハ数が大きい場合は、マッハ反射はさらに多様な形態に分類されることが知られているが、本稿で論じるマッハ数範囲においては関係ないので立ち入らない。

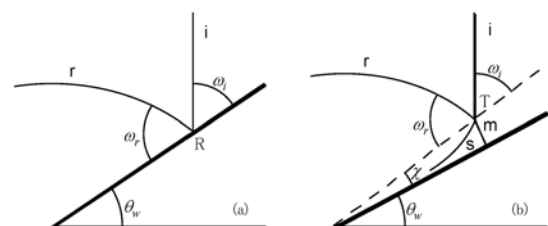


Fig. 1 Regular reflection and Mach reflection.

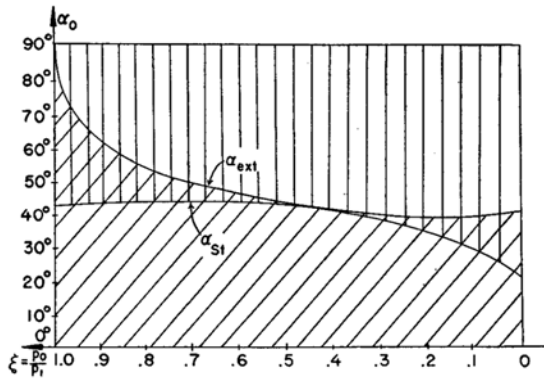


Fig. 2 Existence region for RR and MR (after Courant & Friedrichs<sup>3)</sup>).

さて、伝播する気体の種類が指定されれば比熱比 $\kappa$ は決まるので、たとえば衝撃波が空気中を伝播する場合、入射衝撃波マッハ数 $M_i$ と斜面傾斜角 $\theta_w$ の組み合わせで反射形態が決まることになる。Fig. 2は、横軸に入射衝撃波前後の圧力比 $\xi = p_0/p_1$  ( $p_0$ は入射波前方の圧力、 $p_1$ は入射波後方の圧力)、縦軸に入射角 $\omega_i$ の余角 $\alpha_0 (=90^\circ - \omega_i)$ を取ったグラフである。なお、入射角と反射角 $\omega_r$ はそれぞれ、RRの場合は反射点Rの軌跡(つまり斜面)、MRの場合は三重点Tの軌跡を基準線として、入射波と基準線のなす角を入射角、反射波と基準線のなす角を反射角として定義される(Fig. 1)。このグラフで斜線が施されている領域ではRRのみが存在可能であり、縦線が施されている領域ではMRのみが存在可能である。この2つの領域には左右に分割された重複部分があり、そこでは理論上、RRとMRの両方が実現可能ということになる。

それでは、同じ条件のもとで起きると仮定してRRとMRの違いは何だろうか。いま、平面衝撃波に対して斜めにマッハ数 $M_0$ の超音速気流が角 $\omega_i$ で流入し、角 $\theta$ だけ流れの向きが曲げられたとする(この角を偏角という)。Fig. 3はそのときの流れの様子を表したものである。太い実線が衝撃波の波面を表し、衝撃波前方の気流の、衝撃波に垂直な速度成分に対応するマッハ数 $M_i$ は衝撃波マッハ数と呼ばれている。すなわち、

$$M_i = M_0 \sin \omega_i \tag{1}$$

の関係がある。

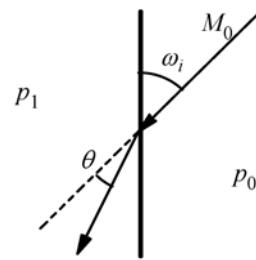


Fig. 3 Flow across a plane shock wave.

このとき、途中の詳細は省くが、斜め衝撃波関係式より、次の関係式が成り立つ<sup>2)</sup>。

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\kappa M_0^2 \sin^2 \omega_i - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \tag{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{p_1}{p_0} - 1}{1 + \kappa M_0^2 - \frac{p_1}{p_0}} \sqrt{\frac{\frac{2\kappa M_0^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} - \frac{p_1}{p_0}}{\frac{p_1}{p_0} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}}} \tag{3}$$

マッハ数 $M_i$ の衝撃波が入射角 $\omega_i$ で入射する時の気流マッハ数 $M_0$ は(1)式から求まる。次に比熱比 $\kappa$ を指定して、この気流の入射角 $\omega_i$ をパラメータ的に変化させた時、(2)式より圧力比 $p_1/p_0$ 、(3)式より偏角 $\theta$ が求まる。

いま、入射衝撃波マッハ数 $M_i = 1.30$ 、比熱比 $\kappa = 1.40$ 、指定された入射角 $\omega_i$ に対して、偏角 $\theta$ と圧力比 $p_1/p_0$ の関係をグラフにしたものを圧力-偏角衝撃波極線(以下、簡単に衝撃波極線と呼ぶことにする)と呼ぶ。濃い実線が入射衝撃波に関する衝撃波極線(I-polarと称する。図でincidentと表示)、薄い実線は反射衝撃波に関するものである。入射衝撃波背後の状態を求めるだけならば、I-polarを描く必要はないが、マッハ数 $M_0$ 後方の状態がI-polar上に存在するのでMRを考える時に役に立つ。

反射衝撃波に対する極線R-polar(図でreflectedと表示)を描く場合には注意が必要である。反射衝撃波前後についても(2)、(3)と同様の関係が成り立つが、圧力比は $p_2/p_1$ になるので、同じグラフ上に描くためには $p_2/p_0 = p_2/p_1 \cdot p_1/p_0$ の関係を使って変換する必要がある。また、偏角については、入射衝撃波前方の流れ

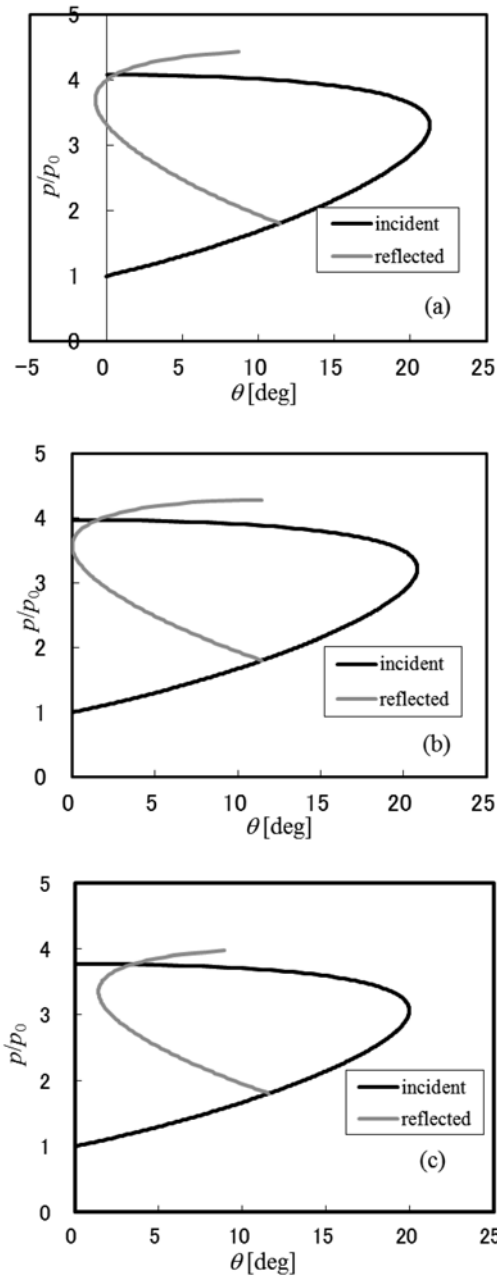


Fig. 4 Pressure-deviation-angle shock polar for  $M_i=1.30$ , (a)  $\omega_i=43.0^\circ$ , (b)  $\omega_i=43.66^\circ$ , (c)  $\omega_i=45.0^\circ$ .

を基準として描けば便利なので、R-polar に対する偏角の出発点は 0 でなく正の値 (入射衝撃波通過時の偏角) とする。より詳しく述べれば、指定された入射角  $\omega_i$  に対して偏角  $\theta_i$  (添え字  $i$  は入射衝撃波を横切った時の偏角という意味で付けた) と圧力比が計算できるので、それに対応する I-polar 上の点を R-polar の出発点として計算するのである。なお、衝撃波を越えた流

れは常に衝撃波に近寄るように曲がる。(2) 式で偏角は常に正の値を取るが、流れの転回方向 (時計回りか反時計回りか) によって符号を与えるのが普通である。すると、衝撃波極線は左右対称のグラフになるが、議論に無関係な片側は省略している。

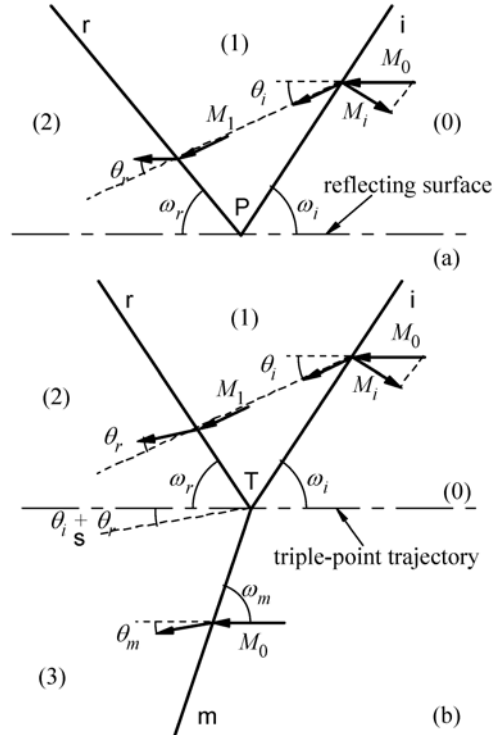


Fig. 5 (a) Regular reflection, (b) Mach reflection.

RR においては (Fig. 5(a) 参照), 入射波をよぎる流れは偏角  $\theta_i$  を生じ、次に反射波をよぎる際に偏角  $\theta_r$  を生じる。反射波後方において、流れの向きは斜面に沿っていることが要請されるが、前述のように流れの偏角は反時計回りに正、時計回りに負というように符号を定義しておけば、

$$\theta_i + \theta_r = 0 \quad (4)$$

となる。流れが入射波をよぎる時に方向が  $\theta_i$  だけ曲げられ、その流れが反射波を通過する際に再び  $\theta_r$  だけ曲げられるが、その結果、流れの向きは入射波前方の流れの向きと同じ (すなわち斜面に平行な方向) であることを意味する。このことを Fig. 4(a) を使って説明すると、流れが入射波を横切った時に生じる偏角は I-polar

上の R-polar が出る点 ( $\theta=11.4^\circ$ ) で表される。この状態は入射波後方の状態だが、同時に反射波前方の状態でもある。R-polar はその状態から衝撃波を横切って生じる状態を示している。正常反射の条件 (4) より、R-polar と圧力軸の交点が反射衝撃波後方の状態を与えることになる。一般に、Fig. 4(a) のように交点は 2 つ存在し、圧力比の小さい解を弱い解 (weak solution)、大きな解を強い解 (strong solution) と呼んでいる。実験を行って実現するのは弱い解である。なぜ強い解が実現せずに弱い解が実現するのかは、いまだに解決されていない圧縮性流体力学における基本的問題の一つである。

入射角を増加させると、R-polar が圧力軸に接する状態が実現できる (Fig. 4(b))。このときには弱い解と強い解が 1 つになり、この接点で RR が実現される。

さらに入射角を大きくすると、R-polar は圧力軸と共有点を持たず (Fig. 4(c))、RR は起こらない。

次に、MR について考える (Fig. 5(b))。入射波を通過した流れは  $\theta_i$  だけ方向を変え、さらに反射波を通過する時に  $\theta_r$  だけ方向を変える。一方、マッハ数  $m$  を通過する流れは  $\theta_m$  だけ向きを変える。この 2 つの流れは滑り面 (slipstream)  $s$  を挟んで接している。また、滑り面によって隔てられた流れ場の圧力は等しい。このことを式で表すと、

$$\theta_i + \theta_r = \theta_m \quad (5)$$

$$p_2 = p_3 \quad (6)$$

となる。(6) 式は

$$p_2/p_0 = p_3/p_0 \quad (6')$$

と同じことである。

マッハ数後方の流れの状態は、I-polar 上の 1 点で表される。一方、反射波後方の流れの状態は R-polar 上に存在する。MR においては (5) と (6') が成り立つということは、I-polar と R-polar の交点が反射衝撃波およびマッハ数後方の条件を与えることを意味す

る。Fig. 4(c) における両曲線の交点が解であり、この点で MR が実現する。

ここで目を Fig. 4(a) および 4(b) に向けると、この場合にも I-polar と R-polar は交わっている。したがって、MR が起きてもおかしくないのだが、現実には RR が起きている。このことは Fig. 2 で説明した二重解領域での現象に対応している。

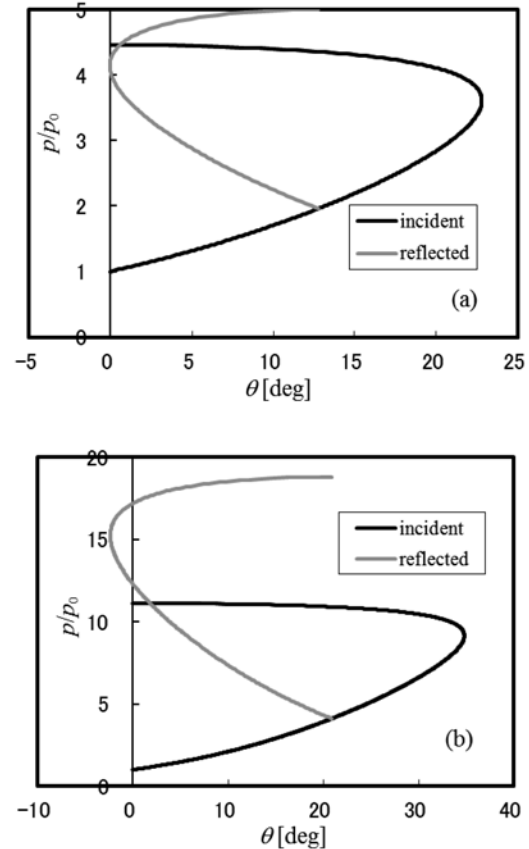


Fig. 6 (a) Shock polar for weak oblique shock ( $M_i=1.35$ ,  $\omega_i=42.7^\circ$ ), (b) Shock polar for strong oblique shock ( $M_i=1.915$ ,  $\omega_i=52^\circ$ ).

比熱比  $\kappa=1.40$  の空気中を伝播する衝撃波の場合、入射衝撃波マッハ数  $M_i=1.46$  を境にして、これより大きなマッハ数の衝撃波の反射を強い衝撃波の反射、小さいマッハ数の衝撃波の反射を弱い衝撃波の反射と呼んでいる。Fig. 6(a) は弱い衝撃波の反射 (接しているように見えるが、後の拡大図 Fig. 12(a) からわかるように 2 点で交わっている)、Fig. 6(b) は強い衝撃波の反射の場合である。Fig. 4(b) における R-polar の圧力軸における接点が I-polar の圧力最大の

点よりも上になるのが強い衝撃波, 下になるのが弱い衝撃波である.

このことを物理的に考えると, 強い衝撃波において反射波後方の圧力は RR の方が MR よりも大きく, 弱い衝撃波では逆に MR の方が RR よりも大きいということになる.

そこで, 次のような疑問が生じる.

- (i) 弱い衝撃波の RR において, 反射衝撃波後方の圧力を高めれば MR への遷移が起きるか.
- (ii) 強い衝撃波の RR において, 反射衝撃波後方の圧力を下げれば MR への遷移が起きるか.

仮にこのようなことが実現すれば衝撃波は不安定であり, 逆に, 実現しなければ安定ということになる. 本研究では, 衝撃波の安定性について実験的に調べるため, 入射衝撃波マッハ数  $M_i=1.35$  の弱い衝撃波 (i) の場合について実験を行った結果について報告する.

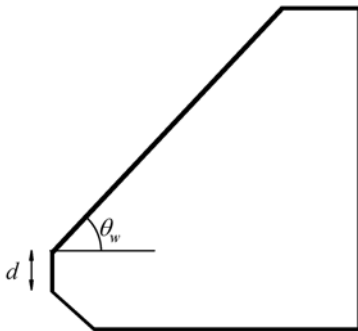


Fig. 7 Model used in the experiment.

## 2. 実験装置および実験方法

実験に使用した衝撃波管および光学系については文献<sup>4)</sup>を参照のこと. ただし, 可視化には影写真法を用いた. 入射衝撃波マッハ数  $M_i$  は  $1.35 \pm 0.005$  で, RR における入射角が  $42.7^\circ$  になるように, 斜面傾斜角  $\theta_w = 47.3^\circ$  のモデルを使用した. 入射衝撃波を基準として測定した斜面傾斜角は  $47.60^\circ$  だった. したがって, 実際の入射角は  $42.40^\circ$  となった. 通常の反射実験で用いるような先端の鋭いモデルではなく, Fig. 7 に示すように先端部厚み  $d=10$  mm の鈍頭モデルを使用した. これは, 衝撃波がモデルに入射した時に鈍頭部で正面衝突が起こり, 発

生した垂直反射衝撃波によって斜面に形成される斜め反射波の背後圧力を増加させることが期待できるからである. このような鈍頭モデルを使用するのが, 実験装置そのものに手を加えることなく反射波後方の圧力を上げる, 最も単純かつ簡単な方法であり, この実験の肝でもある.

Fig. 7 のウェッジモデル先端コーナーを原点 O とし, 斜面に沿って  $\zeta$  軸, それに垂直に  $\eta$  軸を取り, 正常反射の場合には反射点 R, マッハ反射の場合には三重点 T の座標 ( $\zeta, \eta$ ), および入射波と反射波のなす角  $\omega_{ir}$  を影写真法による可視化写真から万能投影機 (V-12, ニコン) を用いて測定した. 衝撃波伝播方向を  $x$  軸, それに垂直上方に  $y$  軸を取り, 必要に応じて ( $\zeta, \eta$ ) から ( $x, y$ ) へ変換することも可能である. 光源は閃光時間 180ns の瞬間光源であり, 1 回の実験について 1 枚の写真が撮影される.

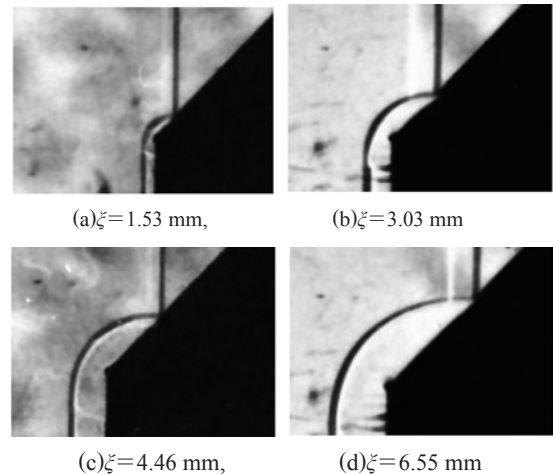


Fig. 8 Development of reflection configuration.



Fig. 9 Enlargement of Fig. 8(b).

### 3. 実験結果

#### 3.1 波面形状

Fig. 8 に反射点近傍を拡大した、波面形状の時間的推移を示す（前述のように 1 回の実験に対して 1 枚の写真しか撮影できないので、これは異なる実験において光源の発光タイミングを変えて撮影したものであることに注意しなければならない）。Fig. 8(a) は入射衝撃波がウェッジに入射した直後、反射点が  $\xi = 1.53 \text{ mm}$  にある時の反射波の形状である。鈍頭部では正面衝突による垂直反射衝撃波が入射衝撃波と反対方向に進行し、圧縮波は斜め反射衝撃波の後方を伝播すると同時に、コーナーから発生した膨張波が平面状反射波の一部に追いつき、反射波の一部に曲率を発生させている。Fig. 8(b) はさらにその後の状況を示すもので、膨張波が広がることによって垂直反射衝撃波に及ぼす影響範囲が拡大している。一方、反射衝撃波後方の反射面は入射衝撃波上流の反射面と比べてわかるように、えぐれたように見える（拡大図 Fig. 9 参照）。これは反射波後方において圧縮波の影響で密度勾配が著しく大きくなったことによるものと考えられる。この反射点近傍を詳しく観察すると、反射波に遮られて入射波が斜面に到達しておらず、通常の RR とは異なることがわかる。他方、マッハステムについては、斜面先端近傍であるため存在の確認が難しい。また、MR の時に現れる滑り面も観察できない。つまり、通常の RR ではないものの、MR と見なすこともできない特殊な反射形態と考えられる。

その後、Fig. 8(c) から Fig. 8(d) に至るまで、反射面の光学的えぐれは減少し、鈍頭部で発生した圧縮波の影響は徐々に弱くなっていると考えられる。

以上の観察の結果、鈍頭部から発生した圧縮波は反射衝撃波に影響を与えたものの、通常の MR への遷移を引き起こすまでには至らなかったと判断できる。Mouton & Hornung<sup>5)</sup> は超音速風洞で擾乱を与えることによって RR から MR への遷移を実現した。本実験は定常な実験ではないため、斜面から発生する擾乱が衝撃波の安定化に寄与すると推測されるが、これは今後の研究課題である。

#### 3.2 反射点位置の変化

Fig. 10 に入射衝撃波の高圧側と反射衝撃波の低圧側との交点で定義した反射点の位置を測定した。平面衝撃波のウェッジ入射直後には反射点高さ  $\eta$  (RR だが、可視化された波面厚さのために  $\eta = 0$  にはならない) は  $0.2 \text{ mm}$  まで増加するが、その後  $0.1 \text{ mm} \sim 0.15 \text{ mm}$  に落ち着く傾向が見られる。

#### 3.3 入射波と反射波のなす角度の変化

Fig. 11 に入射衝撃波と反射衝撃波のなす角度  $\omega_r$  の変化を示す。入射直後は測定誤差が大きく値がばらついているが、全体的な傾向としては伝播とともに減少し、モデル後半では減少がゆるやかになる。鈍頭部で発生した圧縮波の影響が後方に進むにつれて弱まることも定量的にも確認できる。

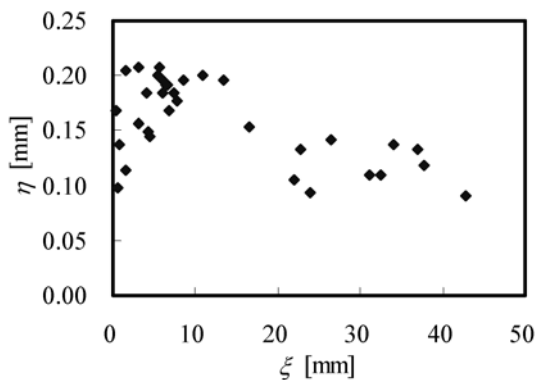


Fig. 10 Variation of location of reflection point.

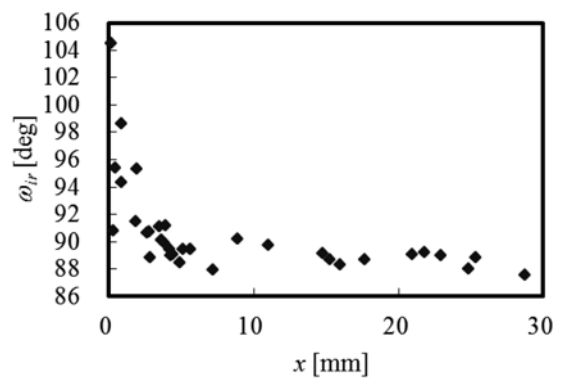


Fig. 11 Variation of wave angle between incident and reflected shocks.

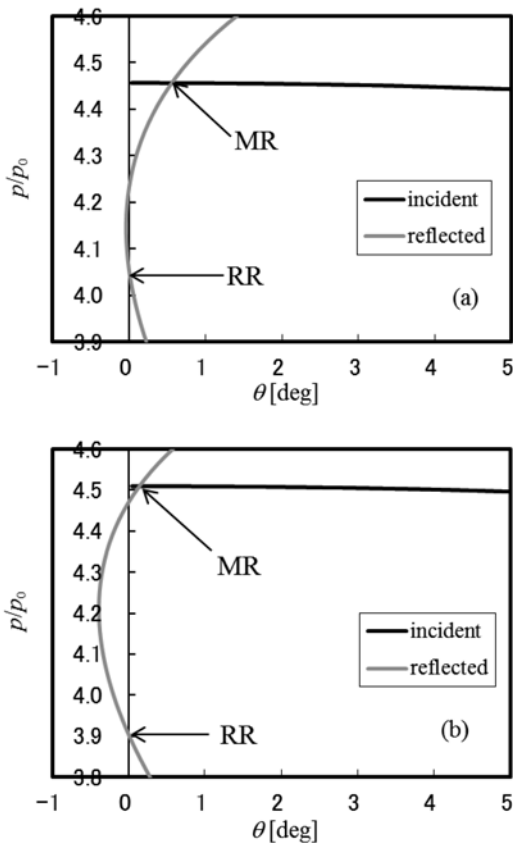


Fig. 12 Enlarged shock polar for  $M_i=1.35$ ,  
(a)  $\omega_i=42.7^\circ$ , (b)  $\omega_i=42.4^\circ$ .

### 3.4 実験結果の検討

当初の実験計画では $\omega_i=42.7^\circ$ だったが、実際には $\omega_i=42.4^\circ$ と $0.3^\circ$ 小さくなった。このわずかな差がどれだけ結果に影響するのか簡単に検討してみる。Fig. 12は $\omega_i=42.7^\circ$ および $\omega_i=42.4^\circ$ に対する衝撃波極線の局所拡大図である。計画通りであれば、RRとMRの無次元圧力差は約0.41、MRの時の偏角は約 $0.5^\circ$ である。一方、実際の入射角においては、RRとMRの無次元圧力差は約0.61、MRの時の偏角は約 $0.13^\circ$ となった。無次元圧力差が大きくなるということは、RRからMRへの遷移により大きな圧力を必要とすることになり、計画よりも難しい条件での実験となったことを意味している。また、偏角が小さくなったということは、MRとして

観測することが難しいことを示唆している。特に、圧縮波の影響がモデル先端付近に限定されるため、たとえMRへの遷移が起きたとしてもマッハステムが確認できるかどうかは疑問である。

### 4. 結論

斜め反射衝撃波背後で強い圧縮波を発生させ、弱い斜め反射衝撃波に与える影響を調べた。本実験条件ではRRから通常のMRへの遷移は起こらず、弱い斜め反射衝撃波は圧縮波に対して安定であることがわかった。

### 文献

- 1) Ben-Dor, G., *Shock Wave Reflection Phenomena*, second edition, Springer, 2007.
- 2) 生井武文, 松尾一泰, 衝撃波の力学, コロナ社, 1983.
- 3) Courant, R., Friedrichs, K.O., *Supersonic Flows and Shock Waves*, Interscience, 1948.
- 4) Kobayashi, S., Adachi, T., Suzuki, T., *Fluid Dyn. Res.*, **35**, 275-286 (2004).
- 5) C.A. Mouton & H.G. Hornung, *Proc. ISSW26*, 1413-1418 (2009).

### 追記

モデルの鈍頭部で垂直反射した衝撃波背後の圧力を計算したところ、斜め反射衝撃波後方の圧力より低いことが判明した。したがって、垂直反射波に追いつく波は膨張波ではなくて圧縮波であり、斜め反射衝撃波の後から進行する波は膨張波である。3.1における記述はそうのように読み替える必要がある。このことが判明したのは校正刷りができあがってからのことで、本研究の構想そのものにも影響し、部分的な修正で対処できることはないので、追記の形で訂正する(著者)。