埼玉工大紀要
No. 4 (1986)

連分数展開で表現された ある種の無理数について

岡　野　　武

§1 序

まず，この小論において，a_1, a_2, a_3, …; b_1, b_2, b_3, … はすべて整数で，$a_1\geqq 0$, $a_2>0$, $a_3>0$, …; $b_1\geqq 0$, $b_2>0$, $b_3>0$, … であるとする．G. Nettler は [1] において，次の定理を証明した．

Nettler の定理

$$A=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots,\quad B=b_1+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots\cdots$$

は次の条件をみたすものとする．十分大きなすべての自然数nに対して，

$$a_n>b_n>a_{n-1}^{(n-1)^2}.$$

そのとき，A, B, $A\pm B$, A/B, AB はすべて超越数である．

この小論では，上の定理に関連して，次の定理を証明する．

定理

$$A=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots,\quad B=b_1+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots\cdots$$

は次の条件をみたすものとする．十分大きなすべての自然数nに対して，

$$a_n>b_n>a_{n-1}^{\gamma(n-1)}.$$

そのとき，A, B, $A\pm B$, A/B, AB はすべて無理数である．

ここで，γ は $\gamma>8$ をみたす任意の定数である．

§2 補助定理

補助定理 1

すべての自然数nに対して，

$$A(n)=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n} \tag{1}$$

$$B(n)=b_1+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{b_n}=\frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n} \tag{2}$$

とおく．そのとき，次の関係式を得る．

$$A(n)+B(n)=a_1+b_1+\frac{a_2+b_2}{a_2b_2}+\frac{a_2b_2F_3}{E_3-F_3}+\frac{E_3F_4}{E_4-F_4}+\frac{E_4F_5}{E_5-F_5}+\cdots\cdots+\frac{E_{n-1}F_n}{E_n-F_n}, \tag{3}$$

$$E_n={}^aQ_n{}^bQ_n({}^aQ_{n-2}{}^aQ_{n-1}+{}^bQ_{n-2}{}^bQ_{n-1}),$$

$$F_n={}^aQ_{n-2}{}^bQ_{n-2}({}^aQ_{n-1}{}^aQ_n+{}^bQ_{n-1}{}^bQ_n),$$

$$B(n)-A(n)=b_1-a_1+\frac{a_2-b_2}{a_2b_2}+\frac{a_2b_2H_3}{G_3-H_3}+\frac{G_3H_4}{G_4-H_4}+\frac{G_4H_5}{G_5-H_5}+\cdots\cdots+\frac{G_{n-1}H_n}{G_n-H_n}, \tag{4}$$

$$G_n={}^aQ_n{}^bQ_n({}^aQ_{n-2}{}^aQ_{n-1}-{}^bQ_{n-2}{}^bQ_{n-1}),$$

$$H_n={}^aQ_{n-2}{}^bQ_{n-2}({}^aQ_{n-1}{}^aQ_n-{}^bQ_{n-1}{}^bQ_n),$$

$$\frac{A(n)}{B(n)}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{b_1b_2-a_1a_2}{a_2b_1(b_1b_2+1)}+\frac{a_2b_1(b_1b_2+1)J_3}{I_3-J_3}+\frac{I_3J_4}{I_4-J_4}+\frac{I_4J_5}{I_5-J_5}+\cdots\cdots+\frac{I_{n-1}J_n}{I_n-J_n}, \tag{5}$$

$$I_n={}^aQ_n{}^bP_n({}^aQ_{n-2}{}^aP_{n-1}-{}^bQ_{n-2}{}^bP_{n-1}),$$

$$J_n={}^aQ_{n-2}{}^bP_{n-2}({}^aQ_n{}^aP_{n-1}-{}^bQ_n{}^bP_{n-1}),$$

$$A(n)B(n)=a_1b_1+\frac{a_1a_2+b_1b_2+1}{a_2b_2}+\frac{a_2b_2L_3}{K_3-L_3}+\frac{K_3L_4}{K_4-L_4}+\frac{K_4L_5}{K_5-L_5}+\cdots\cdots+\frac{K_{n-1}L_n}{K_n-L_n}, \tag{6}$$

$$K_n={}^aQ_n{}^bQ_n({}^aQ_{n-2}{}^aP_{n-1}+{}^bQ_{n-1}{}^bP_{n-2}),$$

$$L_n={}^aQ_{n-2}{}^bQ_{n-2}({}^aQ_n{}^aP_{n-1}+{}^bQ_{n-1}{}^bP_n).$$

以上の結果は Nettler の [1] によるものである．

補助定理 2

$$C=e_1+\frac{d_2}{e_2}+\frac{d_3}{e_3}+\cdots\cdots$$

を補助定理 1 で与えられた $A\pm B$, A/B, AB のそれぞれの連分数展開であるとする．

$$\frac{{}^cP_n}{{}^cQ_n}=e_1+\frac{d_2}{e_2}+\frac{d_3}{e_3}+\cdots\cdots+\frac{d_n}{e_n}$$

とおく．

そのとき，十分大きなすべての自然数nに対して， $a_n>b_n$ ならば，${}^cQ_n<{}^aQ_n^{\delta n}$ である.

ここで，δ は $\delta>8$ をみたす任意の定数である.

証明. (3), (4), (5), (6)より，十分大きなすべての自然数nに対して，次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}{}^cQ_n&=e_n{}^cQ_{n-1}+d_n{}^cQ_{n-2}<{}^cQ_{n-1}(d_n+e_n)<{}^cQ_{n-2}(d_{n-1}+e_{n-1})(d_n+e_n)\\&<\cdots\cdots<\prod_{i=2}^{n}(d_i+e_i)<\prod_{i=2}^{n}{}^aQ_i^{\delta}<{}^aQ_n^{\delta n}\end{aligned}$$

これより，定理が証明された.

補助定理 3

$\{p_n\}$， $\{q_n\}$， $\{M_n\}$ はそれぞれ正の整数から成る任意の数列で次の条件をみたすものとする.

(i) $p_n\leqq p_{n+1}$， $q_n\leqq q_{n+1}$ $\quad(n=1, 2, 3, \cdots)$

(ii) $p_n+q_n<p_{n+1}+q_{n+1}$ $\quad(n=1, 2, 3, \cdots)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} q_n=\lim_{n\to\infty} M_n=\infty$

そのとき，有理数 $\alpha\,(\alpha>0)$ に対して，

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nM_n}$$

をみたす p_n, q_n の組 $(p_n,\ q_n)$ は高々有限個しか存在しない.

証明. $\alpha=\dfrac{P}{Q}$ （P, Q は互いに素な正の整数である.）とおく.

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{P}{Q}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{|Pq_n-Qp_n|}{Qq_n}$$

$\alpha\neq\dfrac{p_n}{q_n}$ のとき，$|Pq_n-Qp_n|\geqq1$ であるから， 十分大きなすべての n に対して，

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\geqq\frac{1}{Qq_n}>\frac{1}{q_nM_n}$$

となる.

以上により，定理が証明された.

§3 定理の証明

まず，A, B は無限連分数だから共に無理数である.

次に，$A+B$ が無理数であることを示す．

$$A+B=C=e_1+\frac{d_2}{e_2}+\frac{d_3}{e_3}+\cdots\cdots$$

とおき，$n\geqq 1$ に対して，

$$\frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n}+\frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n}=\frac{{}^cP_n}{{}^cQ_n}$$

とおく．n が十分大きいとき，次の関係式を得る．

$$\left|C-\frac{{}^cP_n}{{}^cQ_n}\right|\leqq\left|A-\frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n}\right|+\left|B-\frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n}\right|$$

$$<\frac{1}{{}^aQ_n{}^aQ_{n+1}}+\frac{1}{{}^bQ_n{}^bQ_{n+1}}<\frac{2}{{}^bQ_n{}^bQ_{n+1}}$$

$$<\frac{2}{b_{n+1}\cdot{}^bQ_n{}^2}<\frac{2}{a_n{}^{\gamma n}\cdot{}^bQ_n{}^2}$$

また，n が十分大きいとき，次の関係式を得る．

$${}^aQ_n<(a_n+1)\cdot{}^aQ_{n-1}\leqq(2a_n)\cdot{}^aQ_{n-1}<\cdots\cdots<\prod_{i=2}^{n}(2a_i)=2^{n-1}a_2a_3\cdots a_n$$

$$<2^{n-1}\cdot a_n{}^{1+\frac{1}{\gamma(n-1)}+\frac{1}{\gamma^2(n-1)(n-2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{\gamma^{n-2}(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2}}$$

$$<2^{n-1}\cdot a_n{}^{1+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\gamma-1}}<2^{n-1}\cdot a_n{}^{\frac{\gamma}{\delta}}$$

ここで，δ は $8<\delta<\gamma$ をみたす定数である．

これより，

$$a_n{}^{\gamma n}>\frac{{}^aQ_n{}^{\delta n}}{2^{\delta n(n-1)}}$$

である．補助定理 2 により，次の関係式を得る．

$$\left|C-\frac{{}^cP_n}{{}^cQ_n}\right|<\frac{2}{{}^aQ_n{}^{\delta n}\dfrac{{}^bQ_n{}^2}{2^{\delta n(n-1)}}}<\frac{2}{{}^cQ_n\dfrac{{}^bQ_n{}^2}{2^{\delta n(n-1)}}}$$

ここで，

$$M_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}^bQ_n{}^2}{2^{\delta n(n-1)}}$$

とおき，${}^bQ_n$ を評価する．

$${}^bQ_n>b_n\cdot{}^bQ_{n-1}>a_{n-1}^{\gamma(n-1)}\cdot{}^bQ_{n-1}>\cdots\cdots>\left(a_{n-1}^{n-1}a_{n-2}^{n-2}\cdots a_2^2\right)^{\gamma}$$

$$>\left(2^{2!+\gamma\cdot3!+\gamma^2\cdot4!+\cdots\cdots+\gamma^{n-3}\cdot(n-1)!}\right)^{\gamma}>2^{\gamma^{n-2}\cdot(n-1)!}$$

$(n\geqq 3)$

この不等式より，

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$$

である．補助定理3により，Cが無理数であることが証明された．

続いて，A/B が無理数であることを示す．

$$\frac{A}{B} = C = e_1 + \frac{d_2}{e_2} + \frac{d_3}{e_3} + \cdots\cdots$$

とおき，$n \geqq 1$ に対して，

$$\frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n} \Big/ \frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n} = \frac{{}^cP_n}{{}^cQ_n}$$

とおく．また，$n \geqq 3$ に対して，

$$\frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n} \leqq 2a_1, \quad \frac{1}{2b_2} \leqq \frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n}$$

であるから，nが十分大きいとき，次の関係式を得る．

$$\left| C - \frac{{}^cP_n}{{}^cQ_n} \right| = \left| \frac{A}{B} - \frac{{}^aP_n/{}^aQ_n}{{}^bP_n/{}^bQ_n} \right|$$

$$= \frac{\left| \frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n}\left(A - \frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n}\right) + \frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n}\left(\frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n} - B\right) \right|}{B({}^bP_n/{}^bQ_n)}$$

$$\leqq \frac{\left| A - \frac{{}^aP_n}{{}^aQ_n} \right|}{B} + \frac{2a_1 \left| B - \frac{{}^bP_n}{{}^bQ_n} \right|}{B/2b_2}$$

$$< \frac{4a_1b_2 + 1}{B} \cdot \frac{2}{{}^bQ_n{}^bQ_{n+1}}$$

この関係式より，$A+B$ の場合と同様に A/B が無理数であることが示される．

$A-B$, AB が無理数であることも同様に証明できる．

§4 1つの例

$$A = 2^{2!} + \frac{1}{2^{4!}} + \frac{1}{2^{6!}} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{(2n)!}} + \cdots\cdots$$

$$B = 2^{5\cdot 1!} + \frac{1}{2^{5\cdot 3!}} + \frac{1}{2^{5\cdot 5!}} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{5\cdot(2n-1)!}} + \cdots\cdots$$

であるとき，A, B, $A \pm B$, A/B, AB はすべて無理数である．

証明．$a_n = 2^{(2n)!}$, $b_n = 2^{5\cdot(2n-1)!}$

であるから，$n \geqq 3$ に対して，$a_n > b_n$ である．

また，$n \geqq 2$ に対して，

$$\frac{\log b_n}{(n-1)\log a_{n-1}}=\frac{5\cdot(2n-1)!}{(n-1)\cdot(2n-2)!}=\frac{5(2n-1)}{n-1}>10$$

であるから,

$$b_n>a_{n-1}^{10(n-1)}$$

となる. §3 の定理により, A, B, $A\pm B$, A/B, AB はすべて無理数である. よって, 証明が完了する.

文　献

[1] G. Nettler, Transcendental Continued Fractions, J. Number Theory **13** (1981), 456-462.

[2] P. Bundschuh, Transcendental Continued Fractions, J. Number Theory **18** (1984), 91-98.