埼玉工大紀要
No. 5 (1987)

ある種の実数の有理数による近似について

岡　野　　武

§1 序

ほとんどすべての実数の有理数による近似についてはKhintchineの定理がよく知られている.

Khintchine の定理 $\{f(n)\}$ は $n \geqq n_0$ に対して定義された非増加の正の数列であるとする. そのとき,

(1) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)=\infty$

ならば, ほとんどすべての実数 α に対して,

(2) $\displaystyle\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q}$

をみたす互いに素な整数の組 $(p, q)(q>0)$ が無限に多く存在する.

$f(n)=\dfrac{1}{n\log n}$ はこの定理の条件をみたすので, 次の系を得る.

系 $f(n)=\dfrac{1}{n\log n}$ $(n=2, 3, \cdots\cdots)$

とする. そのとき, ほとんどすべての実数 α に対して,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q}$$

をみたす互いに素な整数の組 $(p, q)(q>0)$ が無限に多く存在する.

この小論では, 上の定理に関連して, 条件を少し弱めた $\{f(n)\}$ ((1)の条件を除く) を任意に与えたとき, 不等式 (2) をみたす互いに素な整数の組 $(p, q)(q>0)$ が無限に多く存在するような実数 α を構成する. 次に, 系における $f(n)$ について実数 α を具体的に1つ求める.

§2 定理

定理 $\{f(m)\}$ は $m \geqq m_0$ に対して定義された正の数列であるとする.

実数 α の第 n 近似分数を p_n/q_n とし，α の正則連分数展開を次のように定める.

$$\alpha=[0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots]$$

$f(q_n)>0$ $(q_n\geqq m_0)$ となる最小の n を N とする.

$$a_1=1,\ \cdots,\ a_{N+1}=1,\ a_{N+2}>\frac{1}{f(q_{N+1})},\ a_n>\frac{f(q_{n-2})}{f(q_{n-1})}\quad (n\geqq N+3)$$

であるとする. そのとき,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q}$$

をみたす互いに素な整数の組 $(p,q)\,(q>0)$ が無限に多く存在する.

証明. $\left|\alpha-\dfrac{p_n}{q_n}\right|<\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}<\dfrac{1}{q_n}\cdot\dfrac{1}{a_{n+1}q_n}<\cdots<\dfrac{1}{q_n}\cdot\dfrac{1}{a_{n+1}a_n\cdots a_1}$

また，a_n の条件から，$n\geqq N+2$ に対して,

$$a_1a_2\cdots a_{n+1}>\frac{1}{f(q_n)}$$

であるから，これらの 2 つの不等式から次の不等式を得る.

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{f(q_n)}{q_n}\quad (n\geqq N+2)$$

これより，証明が完了する.

§3　1つの例

ここで，実数 x の整数部分を $[x]$ で表すことにする. §2の定理において,

$$a_{N+2}=\left[\frac{1}{f(q_{N+1})}\right]+1,$$

$n\geqq N+3$ のとき,

$$a_n=\left[\frac{f(q_{n-2})}{f(q_{n-1})}\right]+1$$

とおくことにより実数 α が 1 つ確定する. このことを用いて§1の Khintchine の定理の系の $f(n)$ に対して α を求める.

$a_1=1$　より　$q_1=1$

$a_2=1$　より　$q_2=2$

ここで，$f(q_2)=\dfrac{1}{2\log 2}>0$ だから $N=2$ となり，$a_3=1$ である.

$a_3=1$　より　$q_3=3$

$$a_4=[3\log 3]+1=4 \quad より \quad q_4=14$$

$$a_5=\left[\frac{14\log 14}{3\log 3}\right]+1=12 \quad より \quad q_5=171$$

$$a_6=\left[\frac{171\log 171}{14\log 14}\right]+1=24 \quad より \quad q_6=4118$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これらより α は次のように定まる.

$$\alpha=[0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 12,\ 24,\ \cdots\cdots]$$

この α に対して,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\log q}$$

をみたす互いに素な整数の組 $(p,q)\,(q>0)$ が無限に多く存在する. なお, この α が超越数であるかどうかについては未解決である.

文　献

[1] A. Khintchine, Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen, Math. Ann. **92** (1924), 115–125.

[2] A. Khintchine, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z. **24** (1926), 706–714.

[3] W. M. Schmidt, Approximation to algebraic numbers, L'Enseignement Math. **17** (1971), 187–253.