埼玉工大紀要
No. 7 (1989)

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ を近似するそれぞれの有理数について

岡 野　　武

§1 序

3次以上の代数的数の正則連分数展開における第n部分商の形については，現在でもなお解明されていない．従って，これらの数それぞれについての最良近似分数を無限に多く求めることは非常に困難に思われる．このような問題へのアプローチの第一歩として，この小論において特に$\sqrt[3]{2}$と$\sqrt[3]{4}$に対して Jacobi のアルゴリズムを使い，これらの数各々の近似分数から成る無限数列を実際に求めることにする．

§2 Jacobi のアルゴリズム

正則連分数における Euclid のアルゴリズムは Jacobi と Perron によって，下記のように一般化された．

$$1,\ \alpha_1^{(0)},\ \cdots,\ \alpha_{n-2}^{(0)},\ \alpha_{n-1}^{(0)}$$

をn個の正の実数の組とし，1以外の$n-1$個の数はすべて無理数であるとする．次のようなn個の実数の組を無限に多く構成する．

$$1,\ \alpha_1^{(\nu)},\ \cdots,\ \alpha_{n-2}^{(\nu)},\ \alpha_{n-1}^{(\nu)} \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

ただし，

$$\alpha_{k-1}^{(\nu+1)}=\frac{\alpha_k^{(\nu)}-a_k^{(\nu)}}{\alpha_1^{(\nu)}-a_1^{(\nu)}} \qquad (k=1,\ \cdots,\ n-1)$$

$$\alpha_{n-1}^{(\nu+1)}=\frac{1}{\alpha_1^{(\nu)}-a_1^{(\nu)}}$$

であり，ここで，$a_k^{(\nu)}=[\alpha_k^{(\nu)}]$ は $\alpha_k^{(\nu)}$ を超えない最大の整数である．このとき，次のような展開を得る．

$$\alpha_1^{(\nu)}=a_1^{(\nu)}+\frac{1}{\alpha_{n-1}^{(\nu+1)}}$$

$$\alpha_k^{(\nu)}=a_k^{(\nu)}+\frac{\alpha_{k-1}^{(\nu+1)}}{\alpha_{n-1}^{(\nu+1)}}\qquad (k=2,\ \cdots,\ n-1)$$

次に，漸化式により $A_k^{(\nu)}$ を定義する．

$$A_k^{(k)}=1,\ A_k^{(\nu)}=0\qquad (k,\ \nu=0,\ \cdots,\ n-1\,;\ k\neq\nu)$$

$$A_k^{(\nu+n)}=A_k^{(\nu)}+a_1^{(\nu)}A_k^{(\nu+1)}+\cdots+a_{n-1}^{(\nu)}A_k^{(\nu+n-1)}$$

$$(k=0,\ \cdots,\ n-1\,;\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

このとき，$\dfrac{A_k^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ は $\alpha_0^{(k)}$ の近似分数である．すなわち，

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{A_k^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}=\alpha_k^{(0)}\qquad (k=0,\ \cdots,\ n-1)$$

である．

$$a_k^{(\nu+m)}=a_k^{(\nu)}\qquad (k=0,\ \cdots,\ n-1\,;\ \nu=l,\ l+1,\ \cdots)$$

であるとき，このアルゴリズムを *periodical* といい，l 行の整数の組

$$1,\ a_1^{(\nu)},\ \cdots,\ a_{n-1}^{(\nu)}\qquad (\nu=0,\ \cdots,\ l-1)$$

を *pre-period* といい，また，m 行の整数の組

$$1,\ a_1^{(\nu)},\ \cdots,\ a_{n-1}^{(\nu)}\qquad (\nu=l,\ \cdots,\ l+m-1)$$

を *period* という．

Bernstein の定理　$D,\ d,\ n$ は正の整数で，$d\,|\,D,\ n\geqq 3,\ 1\leqq d\leqq \dfrac{D}{n-2}$ (特に $D\geqq n-2$) であるとする．

$$\alpha=\sqrt[n]{D^n+d}$$

とおくとき，

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

に対する Jacobi のアルゴリズムは *periodical* で $(n-1)$ 行の *pre-period* と n 行の *period* を持つ．ただし，$d=1$ のときだけは例外として，$(n-1)$ 行の *pre-period* と 1 行の *period* を持つ．

pre-period は次のような形式である．

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & \binom{1}{1}D & \binom{2}{2}D^2 & \cdots\cdots & \binom{n-2}{n-2}D^{n-2} & \binom{n-1}{n-1}D^{n-1}\\
\binom{1}{0} & \binom{2}{1}D & \binom{3}{2}D^2 & \cdots\cdots & \binom{n-1}{n-2}D^{n-2} & \binom{n}{n-1}\dfrac{D^{n-1}}{d}\\
\binom{2}{0} & \binom{3}{1}D & \binom{4}{3}D^2 & \cdots\cdots & \binom{n}{n-2}\dfrac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\dfrac{D^{n-1}}{d}\\
\cdots\cdots & & & & &
\end{array}$$

$$\binom{m}{0} \quad \binom{m+1}{1}D \quad \binom{m+2}{2}D^2\cdots\binom{n-1}{n-m-1}D^{n-m-1} \quad \binom{n}{n-m}\frac{D^{n-m}}{d}\cdots\binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{n-2}{0} \quad \binom{n-1}{1}D \quad \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} \quad \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}$$

また，*period* は次のような形式である．

$$\binom{n-1}{0} \quad \binom{n}{1}\frac{D}{d} \quad \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} \quad \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1}D \quad \binom{n}{2}D^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \binom{n}{n-2}D^{n-2} \quad \binom{n}{n-1}D^{n-1}$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1}D \quad \binom{n}{2}D^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \binom{n}{n-2}D^{n-2} \quad \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1}D \quad \binom{n}{2}D^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} \quad \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1}D \quad \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} \quad \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}$$

系 1，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{4}$ に対する Jacobi のアルゴリズムは *periodical* で 2行の *pre-period* と1行の *period* を持つ．

pre-period は次のような形式である．

1，1，1

1，2，3

また，*period* は次のような形式である．

1，3，3

§3 定理

1，$\alpha_1^{(0)}=\alpha=\sqrt[3]{2}$，$\alpha_2^{(0)}=\alpha^2=\sqrt[3]{4}$ に対して，§2で定義した $A_0^{(\nu)}$, $A_1^{(\nu)}$, $A_2^{(\nu)}$ の値を実際に求める．

定理 1，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{4}$ に対する Jacobi のアルゴリズムにより $A_0^{(\nu)}$, $A_1^{(\nu)}$，$A_2^{(\nu)}$ は次のように表される．

$$A_0^{(\nu)}=-\frac{1}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)}\{(1+\xi_1)^{\nu-1}(\xi_2-\xi_3)$$
$$+(1+\xi_2)^{\nu-1}(\xi_3-\xi_1)+(1+\xi_3)^{\nu-1}(\xi_1-\xi_2)\} \quad (\nu\geqq 2)$$

$$A_1^{(\nu)}=-\frac{1}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)}\{(1+\xi_1)^{\nu-2}(2+\xi_1)(\xi_2-\xi_3)$$

$$+(1+\xi_2)^{\nu-2}(2+\xi_2)(\xi_3-\xi_1)+(1+\xi_3)^{\nu-2}(2+\xi_3)(\xi_1-\xi_2)\}\ (\nu\geqq 2)$$

$$A_2^{(\nu)}=-\frac{1}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)}\{(1+\xi_1)^{\nu-3}(2+\xi_1)^2(\xi_2-\xi_3)$$

$$+(1+\xi_2)^{\nu-3}(2+\xi_2)^2(\xi_3-\xi_1)+(1+\xi_3)^{\nu-3}(2+\xi_3)^2(\xi_1-\xi_2)\}\ (\nu\geqq 2)$$

ここで,

$$\xi_1=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4},\quad \xi_2=\sqrt[3]{2}\omega+\sqrt[3]{4}\omega^2,\quad \xi_3=\sqrt[3]{2}\omega^2+\sqrt[3]{4}\omega$$

$$(\omega^2+\omega+1=0)$$

である.

証明　Bernstein の定理の系により

$$A_k^{(\nu+3)}=A_k^{(\nu)}+3(A_k^{(\nu+1)}+A_k^{(\nu+2)})\qquad (k=0,\ 1,\ 2;\ \nu\geqq 2)$$

であることがわかる.

$$A_k^{(\nu+3)}-pA_k^{(\nu+2)}-qA_k^{(\nu+1)}=r(A_k^{(\nu+2)}-pA_k^{(\nu+1)}-qA_k^{(\nu)})$$

をみたす定数 p, q, r についての関係式は次のようになる.

$$\begin{cases} p+r=3 \\ pr-q=-3 \\ qr=-1 \end{cases}$$

これらの式より p, q を消去して r についての方程式を作ると,

$$r^3-3r^2-3r-1=0$$

であり，根は

$$1+\xi_1,\ 1+\xi_2,\ 1+\xi_3$$

である. 従って, $(p,\ q,\ r)$ は次のようになる.

$$(p,\ q,\ r)=\left(2-\xi_1,\ -\frac{1}{1+\xi_1},\ 1+\xi_1\right),$$

$$\left(2-\xi_2,\ -\frac{1}{1+\xi_2},\ 1+\xi_2\right),$$

$$\left(2-\xi_3,\ -\frac{1}{1+\xi_3},\ 1+\xi_3\right)$$

これらの $(p,\ q,\ r)$ に対して,

$$A_k^{(\nu+2)}-pA_k^{(\nu+1)}-qA_k^{(\nu)}=r^{\nu-2}(A_k^{(4)}-pA_k^{(3)}-qA_k^{(2)})$$

となることを用いて $A_0^{(\nu)}(\nu\geqq 2)$ を求める. まず, §2の定義より,

$$A_0^{(0)}=1,\ A_0^{(1)}=0,\ A_0^{(2)}=0,\ A_0^{(3)}=1,\ A_0^{(4)}=3$$

であるから,

$$A_0^{(\nu+2)}-pA_0^{(\nu+1)}-qA_0^{(\nu)}=r^{\nu-2}(3-p)=r^{\nu-1}$$

となる．p, q, r に数値を代入すると次の関係式を得る．

$$A_0^{(\nu+2)}-(2-\xi_1)A_0^{(\nu+1)}+\frac{1}{1+\xi_1}A_0^{(\nu)}=(1+\xi_1)^{\nu-1} \tag{1}$$

$$A_0^{(\nu+2)}-(2-\xi_2)A_0^{(\nu+1)}+\frac{1}{1+\xi_2}A_0^{(\nu)}=(1+\xi_2)^{\nu-1} \tag{2}$$

$$A_0^{(\nu+2)}-(2-\xi_3)A_0^{(\nu+1)}+\frac{1}{1+\xi_3}A_0^{(\nu)}=(1+\xi_3)^{\nu-1} \tag{3}$$

(1), (2), (3)より $A_0^{(\nu)}$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} A_0^{(\nu)}&=\frac{1}{\xi_1-\xi_3}\left\{\frac{(1+\xi_1)^{\nu-1}-(1+\xi_2)^{\nu-1}}{\xi_1-\xi_2}-\frac{(1+\xi_2)^{\nu-1}-(1+\xi_3)^{\nu-1}}{\xi_2-\xi_3}\right\}\\ &=-\frac{1}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)}\{(1+\xi_1)^{\nu-1}(\xi_2-\xi_3)\\ &\quad+(1+\xi_2)^{\nu-1}(\xi_3-\xi_1)+(1+\xi_3)^{\nu-1}(\xi_1-\xi_2)\} \qquad (\nu\geqq 2)\end{aligned}$$

$A_1^{(\nu)}$, $A_2^{(\nu)}$ $(\nu\geqq 2)$ についても同様に求めることができる．

以上により定理が証明された．

文　献

[1] C. G. J. JACOBI, Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus *drei* vorhergehenden gebildet wird, J. Reine Angew. Math. **69** (1868), 29–64.

[2] O. PERRON, Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Math. Ann. **64** (1907), 1–76.

[3] L. BERNSTEIN, Periodical Continued Fractions for Irrationals of Degree n by Jacobi's Algorithm, J. Reine Angew. Math. **213** (1964), 31–38.

[4] L. BERNSTEIN, Periodicity of Jacobi's Algorithm for a special type of Cubic Irrationals, J. Reine Angew. Math. **213** (1964), 137–146.